TEKIJÄ

PITKÄ MATEMATIIKKA 2

Paavo Heiskanen
Päivi Kaakinen
Pertti Lehtinen
Jukka Lehtonen
Mika Leikas
Jorma Tahvanainen

Sanoma Pro Oy

POLYNOMIFUNKTIOT JA -YHTÄLÖT

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy
1.–3. painos, 2017

ISBN 978-952-63-0381-9

Toimitus: Timo Pitkänen, Ville Sipiläinen
Kuvatoimitus: Anita Kokkila
Ulkoasu: Liisa Holm, Sari Jeskanen
Taitto: Eija Högman
Kuvitus: Marja Venäläinen
Kansi: Vaidas Bagonas, Sari Jeskanen

© Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Pertti Lehtinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas,
Jorma Tahvanainen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot
Tämä teos on oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Tämän teoksen tai sen osan valokopiointi, skannaaminen tai muu digitaalinen kopiointi tai käyttö edellyttää oikeudenomistajan luvan.

Kopiosto ry myöntää teosten osittaiseen kopiointiin lupia. Tarkistakaa, mitkä valokopiointi- ja digiluvat ovat kohdallanne voimassa. Lisätietoja luvista www.kopiosto.fi

Teoksen tai sen osan muuntelu on kielletty.

Käyttäjälle

Tekijä, pitkä matematiikka 2

Pitkän matematiikan opinnot alkavat kurssilla Polynomifunktiot ja -yhtälöt, jonka tavoitteena on, että opiskelija harjaantuu käsittelemään polynomifunktioita ja ratkaisemaan polynomiyhtälöitä ja -epäyhtälöitä.

Eteneminen

Luvun avaa tutkimus tai johdanto, joka ohjaa opiskelijan löytämään uutta tietoa. Uusi teoreettinen tieto esitetään täsmällisesti määritelminä ja lauseina, jotka perustellaan. Esimerkit ohjaavat löydetyn tiedon soveltamiseen. Teoria ja esimerkit on kirjoitettu niin, että opiskelija voi omaksua ne itsenäisesti, ja siksi kirja tukee hyvin myös käänteisen opetuksen menetelmiä.

ESIMERKKI 1

Kirjaan on merkitty esimerkit, jotka on tarkoitus oppia tekemään ilman laskinta.

ESIMERKKI 2

Muissa esimerkeissä opastetaan, kuinka laskinta voidaan käyttää apuna tarkoituksenmukaisella tavalla. Kirjassa laskimella tarkoitetaan myös symbolisen laskennan ohjelmistoa tai muuta teknistä apuvälinettä.

Harjoitustehtävät ovat kahtena sarjana. Sarja I sisältää perustehtäviä, jotka noudattavat esimerkkien järjestystä. Sarja II sisältää perustehtäviä ja vaativampia tehtäviä.

1. Tehtävät, jotka ratkaistaan ilman laskinta, on merkitty taustavärillä.

2. Laskinta voidaan käyttää apuna erityisesti soveltavissa tehtävissä.

E1 Viittaukset esimerkkeihin auttavat harjoittelussa.

Videologolla merkittyihin tehtäviin liittyy opiskelijan digikirjassa ja opettajan digiaineistossa opetusvideo.

Kertaaminen

Kertaustehtävät on jaettu kolmeen osaan: ensin käydään läpi kurssin sisältö otsikoiden mukaan järjestettynä, minkä jälkeen tehtäväsarjoissa A ja B on tehtäviä koko kurssin alueelta.

Toivotamme innostavia opiskeluhetkiä.

Kuopiossa 3.2.2016

Tekijät

Sisällys

1 Polynomit 6

1.1 Polynomien summa ja erotus 6
1.2 Polynomien tulo 12
1.3 Binomin neliö ja kuutio 17
1.4 Summan ja erotuksen tulo 23

2 Potenssiyhtälöt 28

2.1 Neliöjuuri 28
2.2 Neliöjuuren laskusäännöt 35
2.3 Korkeammat juuret 41

3 Toisen asteen polynomifunktio 49

3.1 Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja 49
3.2 Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava 56
3.3 Toisen asteen epäyhtälö 62
3.4 Sovelluksia 68
3.5 Diskriminantti 74

4 Korkeamman asteen polynomifunktio 80

4.1 Tekijöihin jakaminen 80
4.2 Korkeamman asteen yhtälö 86
4.3 Korkeamman asteen epäyhtälö 91
4.4 Nollakohtien ja tekijöiden yhteys 97

Kertaus 105

1 Polynomit 105
2 Potenssiyhtälöt 106
3 Toisen asteen polynomifunktio 107
4 Korkeamman asteen polynomifunktio 109
Tehtäväsarja A 111
Tehtäväsarja B 112

Vastaukset 113
Hakemisto 123

Aikatauluehdotus

		45 min	75 min
1	**Polynomit**	**7**	**4**
1.1	Polynomien summa ja erotus	1	1
1.2	Polynomien tulo	2	1
1.3	Binomin neliö ja kuutio	2	1
1.4	Summan ja erotuksen tulo	2	1
2	**Potenssiyhtälöt**	**5**	**3**
2.1	Neliöjuuri	1	1
2.2	Neliöjuuren laskusäännöt	2	1
2.3	Korkeammat juuret	2	1
3	**Toisen asteen polynomifunktio**	**8**	**5**
3.1	Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja	1	1
3.2	Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava	2	1
3.3	Toisen asteen epäyhtälö	2	1
3.4	Sovelluksia	2	1
3.5	Diskriminantti	1	1
4	**Korkeamman asteen polynomifunktio**	**7**	**4**
4.1	Tekijöihin jakaminen	2	1
4.2	Korkeamman asteen yhtälö	2	1
4.3	Korkeamman asteen epäyhtälö	1	1
4.4	Nollakohtien ja tekijöiden yhteys	2	1
Kertaus		**1**	**1**
	yhteensä	**28**	**17**

1 Polynomit

Tässä luvussa kerrataan polynomeihin liittyviä käsitteitä ja harjoitellaan polynomien yhteen-, vähennys- ja kertolaskua. Lisäksi opitaan muistikaavat, joiden avulla summan neliön, summan kuution sekä summan ja erotuksen tulon laskeminen käy kätevästi.

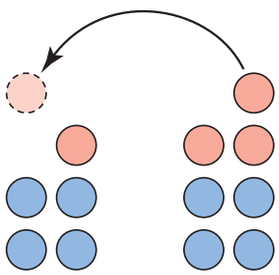
1.1 Polynomien summa ja erotus

TUTKIMUS

1) Tutki alla olevia kahden peräkkäisen parittoman luvun summia. Mitkä säännönmukaisuudet havaitset? Kirjoita havaintosi muistiin.

$1 + 3 =$
$5 + 7 =$
$9 + 11 =$

2) Kuinka nämä säännönmukaisuudet ilmenevät alla olevasta kuvasta?



3) Olkoon n kokonaisluku. Tällöin $2n + 1$ ja $2n + 3$ ovat peräkkäiset parittomat luvut. Tutki, noudattaako lukujen $2n + 1$ ja $2n + 3$ summa kohdassa 1 havaittua säännönmukaisuutta.

4) Tutki vastaavalla tavalla kolmen ja neljän peräkkäisen parittoman luvun summia. Mitä havaitset? Perustele päätelmäsi.

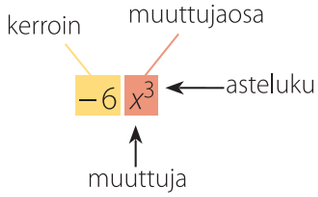
Polynomi

Määritelmä

Monomi

Monomi on luvulla kerrottu muuttujan potenssi tai pelkkä luku. Monomissa muuttujan eksponentti on positiivinen kokonaisluku.

Positiivisten kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$



Monomeja ovat esimerkiksi $5a^2$, $-\frac{3}{4}x$ ja 7.

Lauseke $\frac{2}{x} = 2x^{-1}$ ei ole monomi, koska muuttujan eksponentti ei ole positiivinen kokonaisluku.

Määritelmä

Polynomi

Polynomi on monomien summa. Polynomin yhteenlaskettavat ovat *termejä*.

Määritelmiä

Monomi on polynomi, jossa on yksi termi.

Binomi on polynomi, jossa on kaksi termiä.

Esimerkiksi $x + 2$, $4a^2 + 3a$ ja $2x^2 - 7$ ovat binomeja.

Trinomi on polynomi, jossa on kolme termiä.

Esimerkiksi $x^2 - 6x + 5$ ja $a^2 + 2a + 1$ ovat trinomeja.

Esimerkiksi lauseke

$$3x + 5$$

on muuttujan x polynomi, jonka termit ovat $3x$ ja 5, ja lauseke

$$2a^3 - 4a^2 + 7a - 8 \text{ eli } 2a^3 + (-4a^2) + 7a + (-8)$$

on muuttujan a polynomi, jonka termit ovat $2a^3$, $-4a^2$, $7a$ ja -8.

Termin asteluvulla tarkoitetaan muuttujan eksponenttia. *Polynomin asteluku* on suurin termien asteluvuista. Termi, jossa ei ole muuttujaa, on *vakiotermi*.

Esimerkiksi polynomin $5x^4 + 7x^3 - 2$ termi $5x^4$ on neljännen asteen termi, kolmannen asteen termi on $7x^3$ ja vakiotermi on -2. Polynomin asteluku on 4.

Määritelmä

Polynomifunktio

Funktio, jonka lauseke on polynomi, on *polynomifunktio*.

Esimerkiksi funktio $f(x) = 6x^4 - 5x^2 + 3x - 1$ on neljännen asteen polynomifunktio ja funktio $g(x) = 3x - 2$ on ensimmäisen asteen polynomifunktio.

Kun eksponentti n on positiivinen kokonaisluku, potenssin x^n arvo voidaan laskea kaikilla muuttujan arvoilla. Polynomifunktion määrittelyjoukko on siis koko reaalilukujen joukko.

ESIMERKKI 1

Määritä polynomin $2x^5 - 7x^3 + x^2 - 9$

a) asteluku

b) termit

c) toisen asteen termin kerroin

d) ensimmäisen asteen termin kerroin

e) vakiotermi.

RATKAISU

a) Korkeimman asteen termi on $2x^5$, joten polynomin asteluku on 5.

b) Polynomi $2x^5 - 7x^3 + x^2 - 9$ voidaan kirjoittaa muotoon $2x^5 + (-7x^3) + x^2 + (-9)$.

Polynomin termit ovat $2x^5$, $-7x^3$, x^2 ja -9.

c) Toisen asteen termi on x^2, jonka kerroin on 1.

d) Polynomissa ei ole ensimmäisen asteen termiä. Voidaan ajatella, että ensimmäisen asteen termi on $0 \cdot x$, jonka kerroin on 0.

e) Vakiotermi on -9.

VASTAUS

a) 5 **b)** $2x^5$, $-7x^3$, x^2 ja -9 **c)** 1 **d)** 0 **e)** -9

ESIMERKKI 2

Sievennä polynomi $-9x^2 + 6x^3 + x - 7x + 2x^3 + 11$.

RATKAISU

Huomaa!
Polynomin termit järjestetään tavallisesti muuttujan korkeimmasta potenssista alimpaan.

Polynomi sievennetään yhdistämällä *samanmuotoiset termit*. Polynomin termit ovat samanmuotoiset, jos niiden muuttujaosat ovat samat.

$\underline{-9x^2} + \underline{6x^3} + \underline{x} - \underline{7x} + \underline{2x^3} + 11$ — Järjestetään polynomin termit.

$= \underline{6x^3} + \underline{2x^3} - \underline{9x^2} + \underline{x} - \underline{7x} + 11$ — Yhdistetään samanmuotoiset termit.

$= (6 + 2)x^3 - 9x^2 + (1 - 7)x + 11$ — Lasketaan yhteen- ja vähennyslaskut.

$= 8x^3 - 9x^2 - 6x + 11$

VASTAUS

$8x^3 - 9x^2 - 6x + 11$

Polynomien summa ja erotus

ESIMERKKI 3

Muodosta ja sievennä polynomien

a) $4x^2 - 3x + 7$ ja $6x^2 - x$ summa

b) $x^2 - 5x + 3$ ja $-2x^2 + 6x + 4$ erotus.

RATKAISU

a) $(4x^2 - 3x + 7) + (6x^2 - x)$ — Poistetaan sulkeet.

$= \underline{4x^2} - \underline{3x} + 7 + \underline{6x^2} - \underline{x}$ — Järjestetään termit.

$= \underline{4x^2} + \underline{6x^2} - \underline{3x} - \underline{x} + 7$ — Yhdistetään samanmuotoiset termit.

$= 10x^2 - 4x + 7$

Huomaa!
Erotus voidaan muuttaa summaksi:
$a - b = a + (-b)$

b) $(x^2 - 5x + 3) - (-2x^2 + 6x + 4)$ — Poistetaan sulkeet niin, että vaihdetaan vähentäjän kaikkien termien etumerkit.

$= \underline{x^2} - \underline{5x} + 3 + \underline{2x^2} - \underline{6x} - 4$ — Yhdistetään samanmuotoiset termit.

$= 3x^2 - 11x - 1$

VASTAUS

a) $10x^2 - 4x + 7$ **b)** $3x^2 - 11x - 1$

ESIMERKKI 4

Kokonaislukujen joukko
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Osoita, että kolmen peräkkäisen kokonaisluvun summa on aina kolmella jaollinen.

RATKAISU

Merkitään pienintä lukua muuttujalla n. Seuraava luku on tällöin $n + 1$ ja sitä seuraava luku on $n + 2$. Lukujen summa on

$n + (n + 1) + (n + 2)$

$= n + n + 1 + n + 2$

$= 3n + 3 = 3 \cdot n + 3 \cdot 1$ — Erotetaan yhteinen tekijä.

$= 3(n + 1).$

Osittelulaki
$ab + ac = a(b + c)$

Merkintä
Loppuun saatettu osoitus eli todistus päätetään usein merkillä $\square$.

Koska kolmen peräkkäisen kokonaisluvun summa on kokonaislukujen 3 ja $n + 1$ tulo, niin se on kolmella jaollinen. $\square$

Harjoitustehtäviä

Sarja I

1. Mitkä lausekkeista ovat polynomeja?

a) $3x^4$

b) $a-6$

c) $x^4-11x+\frac{3}{x}$

d) $7a^5-4a+1$

2. E1 Mikä on polynomin $2x^4-5x^3+4x^2-x+1$

a) asteluku

b) toisen asteen termi

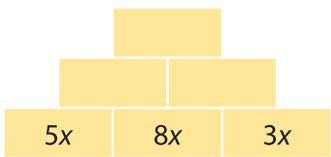
c) ensimmäisen asteen termin kerroin

d) vakiotermi?

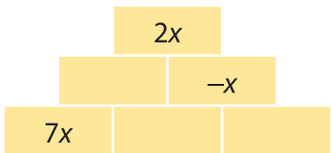
3. ▶ Muodosta muuttujan x kolmannen asteen polynomi, jonka korkeimman asteen termin kerroin on 2, toisen asteen termin kerroin on 1, ensimmäisen asteen termin kerroin on -3 ja vakiotermi on 7.

4. Täydennä yhteenlaskupyramidi. Kahden vierekkäisen monomin summa merkitään yläpuolella olevaan ruutuun.

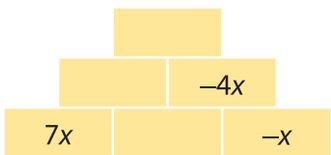
a)



b)



c)



5. Laske polynomifunktion $f(x)=2x^2-5x-12$ arvo

a) $f(3)$ **b)** $f(-1)$ **c)** $f(4)$.

6. Sievennä polynomi.

E2 **a)** $2x^2+4x+3x^2+6$

b) $6x^2-7x+8x-5x^2+2$

7. Sievennä.

E3 **a)** $(3x^2+4x-7)+(-x^2+8)$

b) $(4x+3)-(-3x-5)$

8. ▶ Muodosta ja sievennä polynomien $-x^2+2x-4$ ja $3-2x+x^2$

a) summa **b)** erotus.

9. Ratkaise yhtälö.

a) $3x-(1-2x)=x-6$

b) $6-2x+4=8x-(2x+4)$

10. Polynomit ovat samat, mikäli ne saavat saman arvon kaikilla muuttujan x arvoilla. Määritä vakiolle a sellainen arvo, että polynomit $P(x)=ax+3x-2$ ja $Q(x)=x-2$ ovat samoja.

11. E4 Osoita, että viiden peräkkäisen kokonaisluvun summa on viisi kertaa keskimmäisen luvun suuruinen.

Sarja II

12. Mitkä lausekkeista ovat muuttujan x polynomeja?

a) $3x^8-7x$ **b)** x^3+5x+x^{-3}

c) $x^2-ax+\sqrt{x}$ **d)** $ax^3-ax+\sqrt{a}$

13. Mikä on polynomin $-x^5 - 6x^4 + x^2 - 3$

a) asteluku

b) toisen asteen termi

c) kolmannen asteen termin kerroin

d) vakiotermi?

14. Laske polynomifunktion f arvo kohdassa -3.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 1$

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$

c) $f(x) = 2$

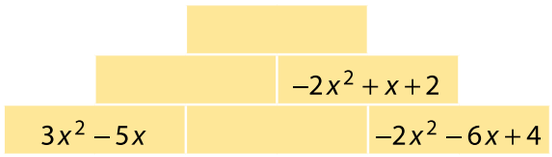
15. Muodosta muuttujan x toisen asteen polynomi, jonka ensimmäisen asteen termin kerroin on -3, vakiotermi on 7 ja joka saa arvon 6, kun x on -1.

16. Sievennä.

a) $(5x^2 - 4x) + (3x^2 - 2x + 8)$

b) $(x^3 - 7x^2) - (-4x^3 + 2x^2 - 1)$

17. Täydennä yhteenlaskupyramidi. Kahden vierekkäisen polynomin summa merkitään yläpuolella olevaan ruutuun.



18. Olkoon $P(x) = 3x^2 + x$ ja $Q(x) = 3x^2 - x + 4$. Osoita, että

a) summan $P(x) + Q(x)$ asteluku on 2

b) erotuksen $P(x) - Q(x)$ asteluku on 1.

19. Muodosta ja sievennä polynomien $-5x^2 + 7x$ ja $-4x^2 + 8x - 3$ erotus. Laske erotuksen arvo, kun $x = -3$.

20. Ratkaise yhtälö.

a) $x - \frac{2x-5}{3} = \frac{2-x}{2}$

b) $\frac{3x-4}{2} - \frac{2x+7}{4} = 1 + \frac{x}{3}$

21. Määritä vakiolle a sellainen arvo, että yhtälön ratkaisu on $x = -2$.

$$\frac{x-3a}{2} - \frac{a-2x^2}{3} - \frac{a}{2} = \frac{15x^2 - 2x - 6}{6}$$

22. Määritä vakioiden a, b ja c arvot siten, että polynomien $P(x) = 5x^2 - ax + 4 - (bx^2 - 7x + 3)$ ja $Q(x) = 8x^2 + x + c$ summa on nolla kaikilla muuttujan x arvoilla.

23. Luvut a, b ja c toteuttavat yhtälöt $b - a = c - b = 3$. Ratkaise luvut a, b ja c, kun

a) $3a - b = 11$

b) $3a - c = 5$.

24. Osoita, että kahden parittoman luvun

a) summa

b) erotus

on parillinen.

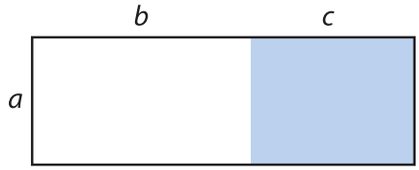
25. Lasketaan yhteen kaksi kokonaislukua, joiden kummankin viimeinen numero on 5. Osoita, että saatu summa on luku, jonka viimeinen numero on 0.

1.2 Polynomien tulo

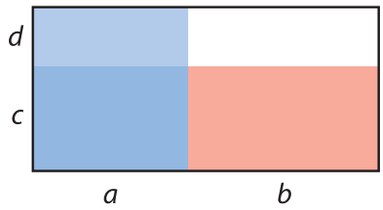
TUTKIMUS

1) Laske suorakulmion pinta-ala, kun sen sivujen pituudet ovat
a) 6 cm ja 8 cm **b)** $2a$ ja $3a$.

2) Suorakulmion sivujen pituudet ovat a ja $b + c$. Laske suorakulmion pinta-ala kahdella tavalla.



3) Suorakulmion sivujen pituudet ovat $a + b$ ja $c + d$. Laske suorakulmion pinta-ala kahdella tavalla.



Tutkimuksessa havainnollistettiin kertolaskun osittelulakia, jota myös polynomien tulo noudattaa. Seuraavissa esimerkeissä palautetaan mieleen, kuinka polynomien tulo lasketaan.

ESIMERKKI 1

Muodosta ja sievennä

a) monomien $6a^3$ ja $5a^4$ tulo

b) monomin $-5x^4$ ja polynomin $3x^2 + 2x - 4$ tulo.

RATKAISU

a) Monomien $6a^3$ ja $5a^4$ tulo merkitään $6a^3 \cdot 5a^4$.

Samankantaisten potenssien tulo
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$6a^3 \cdot 5a^4$

$= 6 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot a^4$ — Järjestetään tulon tekijät niin, että kertoimet tulevat alkuun ja muuttujat loppuun.

$= 30a^7$ — Kertoimeksi tulee kertoimien tulo ja eksponentiksi tulee eksponenttien summa $3+4=7$.

b) Monomin $-5x^4$ ja polynomin $3x^2 + 2x - 4$ tulo merkitään $-5x^4(3x^2 + 2x - 4)$.

Osittelulaki
$a(b+c) = ab + ac$

$-5x^4(3x^2 + 2x - 4)$ — Monomilla kerrotaan polynomin jokainen termi.

$= -5x^4 \cdot 3x^2 - 5x^4 \cdot 2x - 5x^4 \cdot (-4)$ — Kertoimeksi tulee kertoimien tulo ja eksponentiksi eksponenttien summa.

$= -15x^6 - 10x^5 + 20x^4$

VASTAUS

a) $30a^7$ **b)** $-15x^6 - 10x^5 + 20x^4$

Tällä kurssilla polynomilausekkeiden sieventämiset tehdään enimmäkseen ilman laskinta, mutta laajempien analysointia vaativien tehtävien rutiiniosia voidaan laskea myös laskimella.

Polynomien laskutoimituksia laskimella

Polynomien summan ja erotuksen laskin laskee yleensä ilman mitään erillistä komentoa: esimerkiksi `2x + 3 - (x - 1)` = $x + 4$.

Polynomien tulon laskeminen tapahtuu yleensä expand-komennolla: esimerkiksi `expand((2x + 3)(x - 1))` = $2x^2 + x - 3$.

Selvitä, kuinka polynomien summa, erotus ja tulo lasketaan laskimellasi. Laske esimerkkien laskutoimitukset ja varmista, että saat oikeat tulokset.

ESIMERKKI 2

Laske polynomien $3x^2 + 5$ ja $4x + 7$ tulo.

RATKAISU

Osittelulaki
$(a+b)(c+d)$
$= a(c+d)+b(c+d)$
$= ac+ad+bc+bd$

$(3x^2 + 5)(4x + 7)$ — Kertojan jokaisella termillä kerrotaan kerrottavan jokainen termi.

$= 3x^2 \cdot 4x + 3x^2 \cdot 7 + 5 \cdot 4x + 5 \cdot 7$ — Lasketaan kertolaskut.

$= 12x^3 + 21x^2 + 20x + 35$

VASTAUS

$12x^3 + 21x^2 + 20x + 35$

ESIMERKKI 3

Vähennä monomista $8x^3$ monomin $4x$ ja binomin $3x - 2x^2$ tulo.

RATKAISU

$8x^3 - 4x(3x - 2x^2)$ — Kertolasku lasketaan ensin. Tulos merkitään sulkeisiin.

$= 8x^3 - (12x^2 - 8x^3)$ — Poistetaan sulkeet niin, että vaihdetaan vähentäjän kaikkien termien merkit.

$= 8x^3 - 12x^2 + 8x^3$

$= 16x^3 - 12x^2$

VASTAUS

$16x^3 - 12x^2$

Harjoitustehtäviä

Sarja I

26. Laske.
E1 **a)** $x \cdot 3x$ **b)** $-2x^2 \cdot 3x^4$ **c)** $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$

27. Laske.
a) $x(3x - 4)$ **b)** $-2t(5t - 3)$

28. Sievennä.
▶ **a)** $2a^3(4a^2 - 3a + 1)$
b) $-x^2(-x^2 + 3x - 4)$

29. Sievennä.
E2 **a)** $(x + 3)(5x + 7)$
b) $(2a - 4)(3a + 1)$

30. Sievennä.
a) $(x^2 - 3)(4x - 2)$
b) $(-6x^2 + 2x)(4x - 3)$

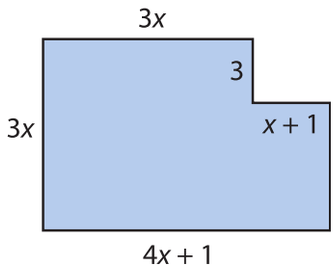
31. Muodosta ja sievennä
▶ **a)** binomien $x + 5$ ja $x - 5$ tulo
b) binomin $2x + 3$ neliö.

32. Sievennä.
E3 **a)** $3x - 2(x - 5)$
b) $5(2x + 4) - 6(3x - 5)$

33. Laske polynomifunktion $p(x)$ arvo kohdassa $x = -5$.
a) $p(x) = (x + 4)(x - 4)$
b) $p(x) = 2x^2 - (x + 2)(x - 2)$

34. Olkoon $P(x) = 3x^2 - 5x$ ja $Q(x) = 2x^2 - 4x + 2$. Sievennä lausekkeet.
a) $xP(x)$
b) $2xP(x) - 3xQ(x)$

35. Alla olevan kuvion pinta-ala on 45. Ratkaise muuttuja x.



Sarja II

36. Sievennä.
a) $3a^2 \cdot 5a^3$
b) $(-4a^4) \cdot (-5a^3)$

37. Sievennä.
a) $4x^2(5x^2 - 6x + 2)$
b) $-3x(2x^3 + 5x - 4)$

38. Muodosta ja sievennä lauseke.
a) monomista $5x^2$ vähennetään monomin $-2x$ ja binomin $3x - 4$ tulo
b) monomin $2x$ ja binomin $7x - 3$ tulosta vähennetään monomin $-4x$ ja binomin $-6x + 5$ tulo

39. Sievennä.
a) $6t^2 - 3t^2(2t - 4)$
b) $4t^3 - t^2 + 2t(t^2 - 2t + 3)$

40. Muodosta ja sievennä polynomien tulo.
a) $\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$ ja $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$
b) $7 + x$ ja $x - 7$

41. Kerro binomien $3x^2 - 5x$ ja $-x + 4$ summa binomilla $2x + 4$.

42. Sievennä.

a) $(3x-4)^2$ **b)** $(-2x^2+1)^2$ **c)** $(x^3+2)^2$

43. Laske polynomien $2x+1$, $4x-2$ ja $4x^2+1$ tulo.

44. Supista murtolauseke.

a) $\dfrac{3x(x+1)}{3x}$ **b)** $\dfrac{4x^2-8x}{4x}$

c) $\dfrac{5x^2(1-2x)}{10(1-2x)}$ **d)** $\dfrac{3x-6x^3}{9-18x^2}$

45. Ratkaise yhtälö.

a) $4x(3x-2)-5x(2x-4)=2x^2+7$

b) $8x^2-(2x+3)(4x-5)=1$

46. Laske polynomifunktion $p(x)$ arvo kohdassa $x=-1$.

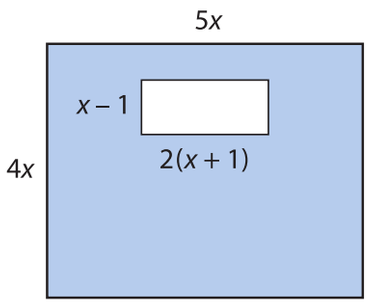
a) $p(x)=(2x^2-5)(x^2+1)$

b) $p(x)=(2x^3+3x^2-1)(4x-6)$

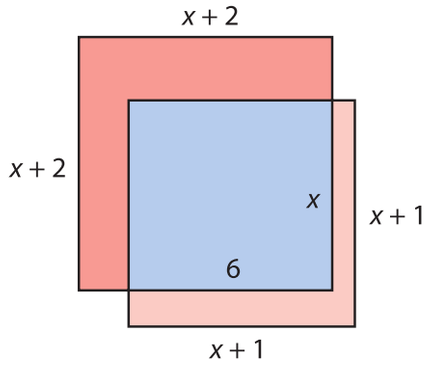
47. Määritä vakio a siten, että polynomin $(3x^2+ax-4)(-2x^2-5x+1)$ toisen asteen termin kerroin on 6.

48. Olkoon $P(x)=x^3-4x^2+3$ ja $Q(x)=2x^4+6x^3$. Määritä polynomin $(2x^2-1)P(x)-xQ(x)$ asteluku.

49. Väritetyn alueen pinta-ala on 74. Ratkaise muuttuja x.

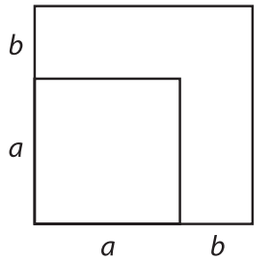


50. Koko kuvion pinta-ala on 77. Ratkaise muuttuja x.



51. Kun Leena ja Ilari myivät niityltä poimimansa kukkakimput 50 sentin kappalehinnalla, saivat he myytyä päivässä 30 kukkakimppua. Kauppa kävi niin hyvin, että he nostivat seuraavana päivänä kukkakimpun hintaa kymmenellä sentillä. Nyt kukkakimppuja meni kaupaksi vain 28. Oletetaan, että kymmenen sentin hinnankorotus pienentää menekkiä aina yhtä monen kukkakimpun verran. Muodosta funktio, joka ilmaisee myyntitulon, kun hintaa korotetaan x senttiä. Tutki, millä hinnalla kimpuista saadaan suurin tuotto.

1.3 Binomin neliö ja kuutio



TUTKIMUS

1) Piirrä neliö ja merkitse sen sivun pituutta kirjaimella a. Laske neliön pinta-ala.

2) Suurenna neliötä jatkamalla sivujen pituuksia b yksikköä. Laske suurennetun neliön sivun pituus.

3) Väritä kuviosta alue, jonka pinta-ala on $a^2 + b^2$.

4) Laske valkoisten alueiden kokonaispinta-ala.

5) Tunnista kuviosta alue, jonka pinta-ala on $(a + b)^2$. Ilmaise pinta-ala $(a + b)^2$ suorakulmioiden ja neliöiden pinta-alojen summana.

Binomin neliö

Tutkimuksessa havainnollistettu tulos on nimeltään binomin neliön muistikaava. Se on ensimmäinen kolmesta muistikaavasta, jotka helpottavat polynomilausekkeiden käsittelyä.

Binomin neliön muistikaava — Lause

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

TODISTUS

Kirjoitetaan binomin neliö tulona ja lasketaan kertolaskut.

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b)\\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b\\ &= a^2 + 2ab + b^2 \quad \square\end{aligned}$$

Lauseen mukaan kahden luvun summan neliö saadaan, kun lukujen neliöiden summaan lisätään lukujen kaksinkertainen tulo:

$(a + b)^2$	$=$	a^2	$+$	$2ab$	$+$	b^2
binomin neliö		luvun a neliö		kaksinkertainen tulo		luvun b neliö

ESIMERKKI 1

Sievennä.

a) $(x+3)^2$ **b)** $(3x-5)^2$

RATKAISU

a) Sovelletaan muistikaavaa $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

$$(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2+6x+9$$

binomin neliö	luvun x neliö	kaksinkertainen tulo	luvun 3 neliö

b) Ilmaistaan erotus $3x-5$ summana $3x+(-5)$ ja sovelletaan muistikaavaa.

$$(3x-5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot(-5) + (-5)^2 = 9x^2-30x+25$$

binomin neliö	luvun $3x$ neliö	kaksinkertainen tulo	luvun -5 neliö

VASTAUS

a) x^2+6x+9 **b)** $9x^2-30x+25$

ESIMERKKI 2

Sievennä.

a) $(x^2+\frac{1}{2})^2$ **b)** $(x^4-3x)^2$

RATKAISU

a) $(x^2+\frac{1}{2})^2$ $(a+b)^2$, missä $a=x^2$ ja $b=\frac{1}{2}$

$= (x^2)^2 + 2\cdot x^2\cdot\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2$ $a^2+2ab+b^2$

$= x^4 + x^2 + \frac{1}{4}$

b) $(x^4-3x)^2 = (x^4+(-3x))^2$ $(a+b)^2$, missä $a=x^4$ ja $b=-3x$

$= (x^4)^2 + 2\cdot x^4\cdot(-3x) + (-3x)^2$ $a^2+2ab+b^2$

$= x^8 - 6x^5 + 9x^2$

VASTAUS

a) $x^4+x^2+\frac{1}{4}$ **b)** $x^8-6x^5+9x^2$

ESIMERKKI 3

a) Ilmaise polynomi $9x^2 - 30x + 25$ binomin neliönä.

b) Määritä vakiolle k sellainen arvo, että polynomi $25x^2 + kx + 16$ on binomin neliö.

RATKAISU

a) Polynomin $9x^2 - 30x + 25$ keskimmäinen termi on lukujen $3x$ ja -5 kaksinkertainen tulo: $-30x = 2 \cdot 3x \cdot (-5)$.

Polynomin toisen asteen termi ja vakiotermi voidaan ilmaista neliöinä: $9x^2 = (3x)^2$ ja $25 = (-5)^2$.

Siis

$9x^2 - 30x + 25 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot (-5) + (-5)^2 = (3x - 5)^2$.

Polynomi voidaan ilmaista binomin neliönä myös toisella tavalla.

$9x^2 - 30x + 25 = (-3x)^2 + 2 \cdot (-3x) \cdot 5 + 5^2 = (-3x + 5)^2$

Huomaa!

Muistikaavaa voidaan käyttää myös käänteiseen suuntaan.
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

b) Polynomin $25x^2 + kx + 16$ toisen asteen termi voidaan ilmaista neliöinä $25x^2 = (5x)^2$ tai $25x^2 = (-5x)^2$.

Vastaavasti vakiotermi voidaan ilmaista neliöinä $16 = 4^2$ tai $16 = (-4)^2$.

Jotta polynomi olisi binomin neliö, tulee keskimmäisen termin kx olla lukujen $\pm 5x$ ja ± 4 kaksinkertainen tulo.

Jos luvut ovat samanmerkkisiä, niiden kaksinkertainen tulo on positiivinen eli $kx = 2 \cdot 5x \cdot 4 = 40x$. Siis on oltava $k = 40$.

Jos luvut ovat erimerkkisiä, niiden kaksinkertainen tulo on negatiivinen eli $kx = -2 \cdot 5x \cdot 4 = -40x$. Siis on oltava $k = -40$.

VASTAUS

a) $(3x - 5)^2$ tai $(-3x + 5)^2$

b) $k = 40$ tai $k = -40$

Binomin kuutio

Binomin korkeammat potenssit voidaan laskea purkamalla ne tuloksi ja laskemalla kertolaskut: esimerkiksi
$(2x + 5)^3 = (2x + 5)(2x + 5)(2x + 5) = (2x + 5)(2x + 5)^2$.

Binomin kuutio voidaan laskea myös seuraavalla muistikaavalla.

Binomin kuution muistikaava **Lause**

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

TODISTUS

Kirjoitetaan binomin kuutio tulona ja lasketaan kertolaskut.

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \square\end{aligned}$$

ESIMERKKI 4

Sievennä.

a) $(2x + 5)^3$ **b)** $(-x + 1)^3$

RATKAISU

a) $(2x + 5)^3$ $(a + b)^3$, missä $a = 2x$ ja $b = 5$

$= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2x \cdot 5^2 + 5^3$ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2x \cdot 25 + 125$

$= 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$

b) $(-x + 1)^3$ $(a + b)^3$, missä $a = -x$ ja $b = 1$

$= (-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (-x) \cdot 1^2 + 1^3$ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

VASTAUS

a) $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$ **b)** $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

Harjoitustehtäviä

Sarja I

52. Sievennä.
E1 **a)** $(a+3)^2$ **b)** $(a+1)^2$ **c)** $(3a+1)^2$

53. Sievennä.
a) $(a-4)^2$ **b)** $(b-8)^2$ **c)** $(3-x)^2$

54. Muodosta ja sievennä lukujen $2x$ ja 6
a) summan neliö
b) neliöiden summa.

55. Sievennä.
a) $(7x+1)^2$ **b)** $(2x-4)^2$ **c)** $(5-4x)^2$

56. Sievennä.
E2 **a)** $(x^2+1)^2$ **b)** $(x^3-4)^2$ **c)** $(x^4+6)^2$

57. Sievennä.
▶ **a)** $(x^2-\frac{1}{2})^2$ **b)** $(x^3-x)^2$ **c)** $(3x^3+1)^2$

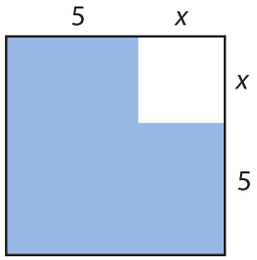
58. Ilmaise binomin neliönä.
E3 **a)** $x^2+2xy+y^2$
b) x^2-2x+1

59. Määritä vakiolle a sellainen arvo, että polynomi on binomin neliö.
a) x^2+8x+a
b) $x^2+ax+25$
c) $4x^2-8x+a$

60. Sievennä.
E4 **a)** $(x+1)^3$ **b)** $(x-1)^3$ **c)** $(-x+2)^3$

61. Sievennä.
▶ **a)** $(3x-2)^3$ **b)** $(5x+1)^3$ **c)** $(-x-1)^3$

62. Millä muuttujan x arvolla väritetyn alueen pinta-ala on 65?



63. Uusi opettaja kertoi, että hänen syntymävuotensa 1991 on kahden peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden erotus. Mitkä nämä luvut ovat?

Sarja II

64. Sievennä.
a) $(5x+1)^2$ **b)** $(x-7)^2$ **c)** $(-x-\frac{1}{2})^2$

65. Muodosta ja sievennä lauseke.
a) lukujen 3 ja x summan neliö
b) lukujen 5 ja $2x$ summan neliö
c) lukujen $8x$ ja 3 neliöiden summa

66. Sievennä.
a) $(-3x-4)^2$
b) $(\frac{x}{2}-4)^2$
c) $(4x)^2-1^2$

67. Sievennä.
a) $(x^3+\frac{1}{3})^2$
b) $(-x^3+x)^2$
c) $(\frac{3}{4}x^2-1)^2$

68. Ilmaise binomin neliönä.
a) $x^2+x+\frac{1}{4}$
b) $4x^2-20x+25$

69. Määritä vakiolle a sellainen arvo, että polynomi on binomin neliö.

a) $x^4 + 6x^2 + a$

b) $ax^2 - 30x + 25$

c) $4x^4 + ax^2 + 16$

70. Sievennä.

a) $(x+2)^3$ **b)** $(-3x+1)^3$ **c)** $(x+\frac{1}{2})^3$

71. Sievennä.

a) $(x^2-1)^3$ **b)** $(5x+2)^3$ **c)** $(-x^2-1)^3$

72. Neliön muotoista maalausta ympäröi kehys, jonka leveys on 4,0 cm ja pinta-ala 544 cm^2. Laske maalauksen pinta-ala.

73. Isoäiti kertoi, että hänen syntymävuotensa 1948 on kahden peräkkäisen parillisen luvun neliöiden erotus. Mitkä nämä luvut ovat? Mikä oli seuraava yhtä hyvä syntymävuosi?

74. **a)** Kokonaisluvun viimeinen numero on 5. Osoita, että luvun neliö päättyy numeroihin 25.

b) Kohdan a todistuksessa löydetään menetelmä, jolla voidaan laskea ilman laskinta numeroon 5 päättyvän kaksinumeroisen luvun neliö. Laske ilman laskinta 65^2.

75. Osoita, että jos kahden kokonaisluvun summan neliöstä vähennetään lukujen tulo nelinkertaisena, niin saatu luku on kokonaisluvun neliö.

76. Onko parittoman luvun kuutio aina pariton luku? Perustele vastauksesi.

77. Binomin neliön $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kertoimet 1, 2 ja 1 sekä binomin kuution $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ kertoimet 1, 3, 3 ja 1 esiintyvät vaakariveinä Pascalin kolmiossa, jonka rivit muodostetaan niin, että rivin ensimmäinen ja viimeinen luku on 1 ja jokainen muu luku on kahden yläpuolella olevan luvun summa.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

a) Muodosta Pascalin kolmion seuraava rivi.

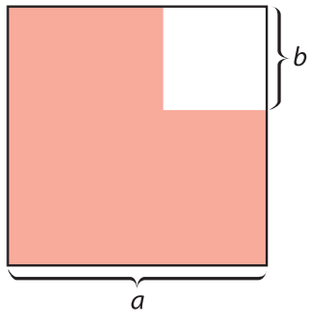
b) Muodosta kaava, jolla voidaan laskea binomin neljäs potenssi $(a+b)^4$.

c) Laske $(x+3)^4$ ja $(x-1)^4$.

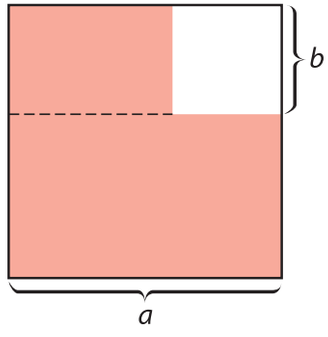
1.4 Summan ja erotuksen tulo

TUTKIMUS

1) Piirrä neliö ja merkitse sen sivun pituutta kirjaimella a. Erota neliön nurkasta pienempi neliö, jonka sivun pituus on b. Määritä jäljelle jääneen kuvion pinta-ala.



2) Jaa jäljelle jäänyt kuvio kahdeksi suorakulmioksi. Ilmaise lukujen a ja b avulla kummankin suorakulmion sivujen pituudet.



3) Muodosta näistä kahdesta suorakulmiosta yksi suurempi suorakulmio. Ilmaise lukujen a ja b avulla tämän suorakulmion sivujen pituudet ja pinta-ala.

Tutkimuksessa havainnollistettu tulos on nimeltään summan ja erotuksen tulon muistikaava.

Summan ja erotuksen tulon muistikaava Lause

Kahden luvun summan ja erotuksen tulo on lukujen neliöiden erotus.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

TODISTUS

Muodostetaan ja sievennetään summan ja erotuksen tulo.

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a\cdot a + a\cdot(-b) + b\cdot a + b\cdot(-b)\\ &= a^2 - ab + ab - b^2\\ &= a^2 - b^2 \quad \square\end{aligned}$$

ESIMERKKI 1

Muodosta ja sievennä termien summan ja erotuksen tulo.

a) x ja 3 **b)** $5x$ ja 4 **c)** $6x^3$ ja 5

RATKAISU

a) $(x+3)(x-3)$ $(a+b)(a-b)$, missä $a = x$ ja $b = 3$

$= x^2 - 3^2$ $a^2 - b^2$

$= x^2 - 9$

b) $(5x+4)(5x-4)$

$= (5x)^2 - 4^2$

$= 25x^2 - 16$

c) $(6x^3+5)(6x^3-5)$

$= (6x^3)^2 - 5^2$

$= 6^2 \cdot (x^3)^2 - 5^2$

$= 36x^6 - 25$

VASTAUS

a) $x^2 - 9$ **b)** $25x^2 - 16$ **c)** $36x^6 - 25$

ESIMERKKI 2

a) Jaa tekijöihin binomi $4x^2 - 25$.

b) Supista murtolauseke $\dfrac{x^2 - 1}{3x - 3}$.

RATKAISU

a) Binomin $4x^2 - 25$ *tekijöihin jakaminen* tarkoittaa sitä, että binomi ilmaistaan alemman asteen polynomien tulona.

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x + 5)(2x - 5)$$

Siis binomin $4x^2 - 25$ tekijät ovat $2x + 5$ ja $2x - 5$.

Huomaa!

Muistikaavaa voidaan käyttää myös käänteiseen suuntaan.
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

b) Murtolausekkeen supistaminen onnistuu vain, jos osoittajalla ja nimittäjällä on tekijänä sama polynomi.

$$\frac{x^2 - 1}{3x - 3}$$

Jaetaan osoittaja ja nimittäjä tekijöihin.

$$= \frac{x^2 - 1^2}{3 \cdot x - 3 \cdot 1}$$

$$\frac{(x \quad 1)\,(x \overset{1}{\cancel{\quad}} 1)}{3\,(x \underset{1}{\cancel{\quad}} 1)}$$

Supistetaan osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä $x - 1$.

$$= \frac{x + 1}{3}$$

VASTAUS

a) $(2x + 5)(2x - 5)$ **b)** $\dfrac{x + 1}{3}$

ESIMERKKI 3 Syventävä

Kun luvun 3 neliöstä vähennetään luku 1, saadaan viereisten kokonaislukujen 2 ja 4 tulo: $3^2 - 1 = 2 \cdot 4$. Tutki, päteekö seuraava lause kaikille kokonaisluvuille: Kun kokonaisluvun neliöstä vähennetään luku yksi, niin saadaan viereisten kokonaislukujen tulo.

RATKAISU

Kokonaisluvun n viereiset kokonaisluvut ovat $n - 1$ ja $n + 1$.

Koska

$$n^2 - 1 = n^2 - 1^2 = (n - 1)(n + 1),$$

niin lause pätee kaikille kokonaisluvuille.

Harjoitustehtäviä

Sarja I

78. Sievennä.

E1 **a)** $(x+7)(x-7)$

b) $(x-1)(x+1)$

c) $(3+x)(3-2x)$

79. Sievennä.

a) $(2x+3)(2x-3)$

b) $(x^2-8)(x^2+8)$

80. Sievennä.

a) $5(x+2)(x-2)$

b) $x^2-2(x+3)(x-3)$

81. Sievennä.

a) $(x^3-9)(x^3+9)$

b) $(x^2+3)(x^2-3)$

82. **a)** Lisää lukuun 5 lukujen x ja 2 summan ja erotuksen tulo.

b) Vähennä luvun x neliöstä lukujen $2x$ ja 1 summan ja erotuksen tulo.

83. Sievennä.

▶ **a)** $(x+3)(x-3)(x^2+9)$

b) $(x+4)(x-4)-(x-2)^2$

84. Ratkaise yhtälö.

a) $(x-5)^2=(x+5)(x-5)$

b) $(2x+3)^2=4(x+3)(x-3)$

85. Jaa tekijöihin.

E2 **a)** x^2-16 **b)** $9x^2-1$ **c)** $25x^2-9$

86. Supista murtolauseke.

▶ **a)** $\dfrac{x^2-16}{3x+12}$

b) $\dfrac{1-9x^2}{1-3x}$

c) $\dfrac{5x+15}{x^2-9}$

87. Laske ilman laskinta.

a) 101^2-99^2 **b)** 53^2-47^2

Sarja II

88. Sievennä.

a) $(3x+4)(3x-4)$

b) $(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$

c) $(3x+2)(-3x-2)$

89. Sievennä.

a) $(2x^2+5)(2x^2-5)$

b) $(-x+4)(-x-4)$

c) $(4a^3+2b^2)(4a^3-2b^2)$

90. Muodosta ja sievennä lauseke.

a) luvusta x vähennetään lukujen x ja 3 summa kerrottuna luvulla 2

b) luvun x neliöstä vähennetään lukujen x ja 3 summan ja erotuksen tulo

c) binomien $x+3$ ja $x-3$ neliöiden erotus

91. Sievennä.

a) $(x+\frac{1}{2})^2-(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$

b) $\big((x+3)(x-3)\big)^2$

92. Ratkaise yhtälö.

a) $4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})-1=(2x-5)^2$

b) $(x+3)(x-3)-4x(x-1)=(1-x)(3x-1)$

93. Sievennä.

a) $(7x+6)(7x-6)(49x^2+36)$

b) $(3x^2-4)^2-3(x^2-4)(x^2+4)$

94. Jaa tekijöihin.

a) x^2-49 **b)** $4x^2-9$ **c)** x^4-16

95. Supista murtolauseke.

a) $\dfrac{x^2-49}{x+7}$

b) $\dfrac{36x^2-1}{6x-1}$

c) $\dfrac{x^4-16}{2x+4}$

96. Supista murtolauseke.

a) $\dfrac{x^2+10x+25}{4x+20}$

b) $\dfrac{4x^2+4x+1}{3-12x^2}$

97. Kokonaisluku vähennetään kuutiostaan.
E3 Osoita, että saatu luku on aina

a) kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo

b) jaollinen luvuilla 2 ja 3.

98. Lukua 1 suuremmat kokonaisluvut, jotka ovat jaollisia vain itsellään ja luvulla 1, ovat *alkulukuja*. Alkulukuja etsitään usein muotoa 2^n-1, missä n on positiivinen kokonaisluku, olevien lukujen joukosta.

a) Esitä luvut 31, 127 ja 8191 muodossa 2^n-1.

b) Osoita, että jos n on parillinen ja suurempi kuin 2, niin luku 2^n-1 ei voi olla alkuluku.

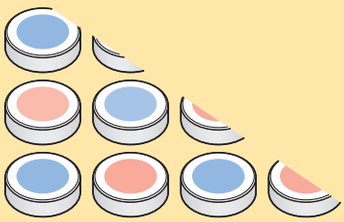
99. Esitä luku 1023 ensin muodossa 2^n-1 ja osoita sitten, että luku ei ole alkuluku jakamalla se tekijöihinsä.

2 Potenssiyhtälöt

Tässä luvussa ratkaistaan neliö- ja potenssiyhtälöitä, palautetaan mieleen neliöjuuren ominaisuuksia ja sievennetään neliöjuurilausekkeita. Harjoitustehtävissä kerrataan muun muassa geometrista jonoa ja summaa.

2.1 Neliöjuuri

TUTKIMUS



1) 25 nappulaa järjestetään neliöksi. Kuinka monta nappulaa kullakin rivillä on?

2) Neliön pinta-ala on $49\ \text{m}^2$. Laske neliön sivun pituus.

3) Neliön pinta-ala on $21\ \text{m}^2$. Arvioi neliön sivun pituus ilman laskinta. Perustele arviosi.

4) Määritä kaikki luvut, joiden neliö on 16.

5) Määritä kaikki luvut, joiden neliö on 0.

6) Määritä kaikki luvut, joiden neliö on -25.

Neliöjuuren määritelmä

Määritelmä

Neliöjuuri

Luvun a neliöjuuri on se epänegatiivinen luku, jonka toinen potenssi on luku a. Luvun a neliöjuurta merkitään $\sqrt{a}$.

Esimerkiksi $\sqrt{49} = 7$, koska $7^2 = 49$ ja 7 on epänegatiivinen luku.

Vaikka $(-7)^2 = 49$, niin määritelmän mukaan negatiivinen luku -7 ei kelpaa luvun 49 neliöjuureksi.

Neliöjuuren määritelmä sisältää seuraavat ominaisuudet:

$\sqrt{a} \geq 0$ Neliöjuuri on se epänegatiivinen luku,

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ jonka toinen potenssi on a.

Neliöjuuren symbolia $\sqrt{\ }$ käytettiin ensimmäisen kerran 1500-luvulla. Se on muotoutunut pienestä *r*-kirjaimesta, joka on latinan juurta merkitsevän sanan, *radix*, ensimmäinen kirjain.

Koska reaaliluvun neliö on aina positiivinen tai nolla, negatiivinen luku ei voi olla minkään luvun neliö. Negatiivisella luvulla ei siis ole neliöjuurta.

Neliöjuuren määrittelyehto Lause

Luvun a neliöjuuri $\sqrt{a}$ on määritelty vain, kun $a \geq 0$.

ESIMERKKI 1

Merkitse ja määritä

a) luvun 64 neliöjuuri

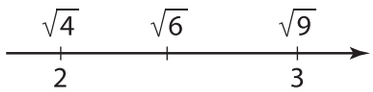
b) luvun 6 neliöjuuri

c) luvun 25 neliöjuuren vastaluku

d) luvun -81 neliöjuuri.

RATKAISU

a) Luvun 64 neliöjuuri merkitään $\sqrt{64}$.
Koska $8^2 = 64$ ja $8 \geq 0$, niin $\sqrt{64} = 8$.



Laskimella saadaan luvulle $\sqrt{6}$ likiarvoja, esimerkiksi $\sqrt{6} \approx 2{,}449$ tai $\sqrt{6} \approx 2{,}449490$.

b) Luvun 6 neliöjuuri merkitään $\sqrt{6}$.
Koska $\sqrt{4} = 2$ ja $\sqrt{9} = 3$, luku $\sqrt{6}$ on lukusuoralla lukujen 2 ja 3 välissä.
Luvun 6 neliöjuuri on irrationaaliluku, joka voidaan ilmaista tarkasti vain juurimerkintää käyttäen.

c) Luvun 25 neliöjuuren vastaluku merkitään $-\sqrt{25}$.
Koska $\sqrt{25} = 5$, niin $-\sqrt{25} = -5$.

d) Koska -81 on negatiivinen luku, sillä ei ole neliöjuurta.

VASTAUS

a) $\sqrt{64} = 8$ b) $\sqrt{6}$ c) $-\sqrt{25} = -5$ d) Ei ole määritelty.

ESIMERKKI 2

Määritä

a) lukujen 64 ja 36 summan neliöjuuri

b) lukujen 64 ja 36 neliöjuurten summa.

RATKAISU

a) $\sqrt{64+36}$
$= \sqrt{100} = 10$

Lasketaan ensin summa ja sitten neliöjuuri.

b) $\sqrt{64} + \sqrt{36}$
$= 8 + 6 = 14$

Lasketaan ensin neliöjuuret ja sitten summa.

VASTAUS

a) 10 **b)** 14

ESIMERKKI 3

Merkitse ja laske

a) luvun 6 neliöjuuren neliö

b) luvun 6 neliöjuuren vastaluvun neliö.

RATKAISU

a) Luvun 6 neliöjuuri merkitään $\sqrt{6}$ ja sen neliö merkitään $\left(\sqrt{6}\right)^2$.

$\left(\sqrt{6}\right)^2 = 6$ $\qquad$ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

b) Luvun 6 neliöjuuren vastaluku merkitään $-\sqrt{6}$, jonka neliö merkitään $\left(-\sqrt{6}\right)^2$.

Koska luvulla ja sen vastaluvulla on sama neliö, niin $\left(-\sqrt{6}\right)^2 = 6$.

VASTAUS

a) $\left(\sqrt{6}\right)^2 = 6$ **b)** $\left(-\sqrt{6}\right)^2 = 6$

Neliöyhtälön ratkaiseminen

ESIMERKKI 4

Mitkä luvut toteuttavat yhtälön?

a) $x^2 = 9$ **b)** $x^2 = 5$ **c)** $x^2 = 0$ **d)** $x^2 = -1$

RATKAISU

a) Koska $3^2 = 9$ ja $(-3)^2 = 9$, niin yhtälön $x^2 = 9$ toteuttavat luvut 3 ja -3.

b) Koska $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ ja $\left(-\sqrt{5}\right)^2 = 5$, niin yhtälön $x^2 = 5$ toteuttavat luvut $\sqrt{5}$ ja $-\sqrt{5}$.

c) Yhtälön $x^2 = 0$ toteuttaa vain luku 0.

d) Koska minkään reaaliluvun neliö ei ole negatiivinen luku, niin yhtälöä $x^2 = -1$ ei toteuta mikään reaaliluku.

VASTAUS

a) 3 ja -3 **b)** $\sqrt{5}$ ja $-\sqrt{5}$ **c)** 0 **d)** ei mikään reaaliluku

Neliöyhtälön $x^2 = a$ ratkaisut

Kun $a \geq 0$, yhtälön $x^2 = a$ toteuttavat luvun a neliöjuuri ja luvun a neliöjuuren vastaluku.

$$x^2 = a$$

$$x = \sqrt{a} \text{ tai } x = -\sqrt{a}$$

Voidaan merkitä myös $x = \pm\sqrt{a}$.

Kun $a < 0$, yhtälöä $x^2 = a$ ei toteuta mikään reaaliluku.

ESIMERKKI 5

Ratkaise yhtälö $3x^2 - 48 = 0$.

RATKAISU

$3x^2 - 48 = 0$ — Ratkaistaan ensin x^2.

$3x^2 = 48 \quad | : 3$

$x^2 = 16$

$x = \sqrt{16}$ tai $x = -\sqrt{16}$ — Yhtälön toteuttavat luvun 16 neliöjuuri ja neliöjuuren vastaluku.

$x = 4$ tai $x = -4$

VASTAUS

$x = 4$ tai $x = -4$

ESIMERKKI 6

Ympyrän pinta-ala on $42\ \text{cm}^2$. Laske ympyrän halkaisija.

RATKAISU

Ympyrän pinta-ala on $A = \pi r^2$, missä r on säteen pituus.

Ratkaistaan säde yhtälöstä $\pi r^2 = 42$.

$\pi r^2 = 42 \quad | : \pi$

$r^2 = \frac{42}{\pi}$

$r = \sqrt{\frac{42}{\pi}}$ tai $r = -\sqrt{\frac{42}{\pi}}$ — Luvun $\frac{42}{\pi}$ neliöjuuri tai neliöjuuren vastaluku.

Koska ympyrän säde on positiivinen luku, niin negatiivinen ratkaisu ei käy. Siis $r = \sqrt{\frac{42}{\pi}}$.

Ympyrän halkaisijan pituus on $2r = 2 \cdot \sqrt{\frac{42}{\pi}} = 7{,}3127\ldots \approx 7{,}3$ (cm).

VASTAUS

Halkaisijan pituus on 7,3 cm.

Harjoitustehtäviä

Sarja I

100. Laske.

a) $\sqrt{9}$ b) $\sqrt{1}$

c) $\sqrt{0}$ d) $\sqrt{100}$

101. Merkitse ja määritä

E1 a) luvun 25 neliöjuuri

b) luvun 13 neliöjuuri

c) luvun 13 neliöjuuren vastaluku.

102. Laske.

a) $\sqrt{81}$ b) $-\sqrt{25}$

c) $\sqrt{-25}$ d) $16-\sqrt{16}$

103. Määritä lukujen 400 ja 900 väliltä ne luonnolliset luvut, joiden neliöjuuri on luonnollinen luku.

104. Laske.

E2 a) $\sqrt{100}-\sqrt{36}$

b) $\sqrt{100-36}$

c) $\sqrt{6^2+8^2}$

105. Laske likiarvo kolmen desimaalin tarkkuudella.

a) $\sqrt{7}$

b) $3\cdot\sqrt{14}$

c) $\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{16}$

106. Laske.

E3 a) $\left(\sqrt{23}\right)^2$

b) $\left(-\sqrt{19}\right)^2$

c) $\left(\sqrt{7}\right)^2$

107. Mitkä luvut toteuttavat yhtälön?

E4 a) $x^2 = 49$ b) $x^2 = 13$ c) $x^2 + 4 = 0$

108. Ratkaise yhtälö.

E5 a) $x^2 = 36$

b) $2x^2 = 162$

c) $x^2 + 4 = 9$

109. Määritä neliön sivun pituus, kun neliön

E6 pinta-ala on

a) 9,0 m^2 b) 28 m^2 c) 3,6 ha.

Sarja II

110. Merkitse ja laske luvun neliöjuuri.

a) 121 b) 3600

c) 0,09 d) 2,25

111. Merkitse ja määritä.

a) lukujen 9 ja 25 neliöjuurten erotus

b) lukujen 9 ja 25 erotuksen neliöjuuri

112. Minkä luvun neliöjuuri on luku

a) 1 b) 9 c) –6?

113. Laske.

a) $\left(\sqrt{17}\right)^2$

b) $\left(-\sqrt{\pi}\right)^2$

c) $\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^2$

114. Laske.

a) $10\cdot\sqrt{9}-4\cdot\sqrt{25}+\sqrt{100}$

b) $\sqrt{90-100+19}$

115. Laske.

a) $\sqrt{12^2+5^2}$

b) $(\sqrt{4}\sqrt{5})^2$

116. Minkä luvun neliöjuuren neliöjuuri on luku

a) 2 **b)** 3 **c)** $\sqrt{7}$?

117. Laske luvun $1 + x^2$ neliöjuuren tarkka arvo, kun

a) $x = -1$ **b)** $x = \sqrt{3}$ **c)** $x = \sqrt{5}$.

118. Ratkaise yhtälö.

a) $x^2 - 81 = 0$

b) $5x^2 = 80$

119. Ratkaise yhtälö.

a) $x^2 - 1 = 10$

b) $2x(x + 2) = 4x + 4$

120. **a)** Suomen viljelty peltoala vuonna 2008 oli yhteensä 2 275 282 ha. Kuinka pitkä olisi näistä pelloista muodostetun neliön sivu?

b) Suomen makean veden vesistöjen pinta-ala on yhteensä 34 526 km^2. Kuinka pitkä olisi näistä vesistöistä muodostetun ympyrän halkaisija?

121. Seuraavalla menetelmällä saadaan lasketttua neliöjuuren likiarvo kohtalaisen tarkasti:

Kun lasketaan luvun A neliöjuuren likiarvoa, etsitään luonnollinen luku a, jonka neliö on lähinnä lukua A.

Esitetään luku A summana $A = a^2 + r$. Tällöin $\sqrt{A} \approx a + \frac{r}{2a}$.

Määritä tällä menetelmällä neliöjuuren likiarvo. Vertaa tulosta laskimella saatuun likiarvoon.

a) $\sqrt{10}$ **b)** $\sqrt{35}$ **c)** $\sqrt{129}$

2.2 Neliöjuuren laskusäännöt

TUTKIMUS

1) Merkitse ja laske luvun **a)** 5 **b)** -3 neliön neliöjuuri. Mitä havaitset? Päättele, mikä olisi luvun a neliön neliöjuuri.

2) Merkitse ja laske lukujen 4 ja 9 **a)** neliöjuurten tulo **b)** tulon neliöjuuri. Mitä havaitset?

3) Merkitse ja laske lukujen 16 ja 49 **a)** neliöjuurten osamäärä **b)** osamäärän neliöjuuri. Mitä havaitset?

Luvun osoittaminen neliöjuureksi

Kun pitää osoittaa, että luku b on luvun a neliöjuuri, on osoitettava, että

1) luku b on epänegatiivinen

2) luvun b neliö on a.

Sama voidaan sanoa lyhyemmin seuraavalla tavalla.

$\sqrt{a} = b$, jos $b \geq 0$ ja $b^2 = a$

Kuten aiemmin todettiin (s. 29), $\sqrt{a}$ on määritelty vain, kun $a \geq 0$. Tämä seuraa siitä, että määritelmän mukaan tulee olla $a = b^2$.

ESIMERKKI 1

Osoita, että $\sqrt{17^{82}} = 17^{41}$.

RATKAISU

On osoitettava, että luku 17^{41} on luvun 17^{82} neliöjuuri.

1) Luku 17^{41} on epänegatiivinen. $b \geq 0$

2) $(17^{41})^2 = 17^{41 \cdot 2} = 17^{82}$ $b^2 = a$

Koska luku 17^{41} toteuttaa neliöjuuren määritelmän molemmat ehdot, niin $\sqrt{17^{82}} = 17^{41}$.

Laskusäännöt

Tulon neliöjuuri — Lause

Tulon neliöjuuri on yhtä suuri kuin neliöjuurten tulo.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \text{kaikilla} \quad a \geq 0 \quad \text{ja} \quad b \geq 0.$$

TODISTUS

On osoitettava, että tulo $\sqrt{a}\sqrt{b}$ on tulon ab neliöjuuri.

1) Tulo $\sqrt{a}\sqrt{b}$ on epänegatiivinen, koska tulontekijät $\sqrt{a}$ ja $\sqrt{b}$ ovat neliöjuuren määritelmän perusteella epänegatiivisia.

Tulon potenssi
$(uv)^n = u^n v^n$

2) Lasketaan tulon $\sqrt{a}\sqrt{b}$ neliö.

$$\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2 \qquad (\sqrt{a})^2 = a \text{ ja } (\sqrt{b})^2 = b$$
$$= ab$$

Koska tulo $\sqrt{a}\sqrt{b}$ toteuttaa neliöjuuren määritelmän molemmat ehdot, niin $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. □

Osamäärän neliöjuuri — Lause

Osamäärän neliöjuuri on yhtä suuri kuin neliöjuurten osamäärä.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{kaikilla} \quad a \geq 0 \quad \text{ja} \quad b > 0.$$

Todistetaan harjoitustehtävässä 148.

Neliön neliöjuuri — Lause

Luvun neliön neliöjuuri on yhtä suuri kuin luvun itseisarvo.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

TODISTUS

On osoitettava, että luku $|a|$ on luvun a^2 neliöjuuri.

1) Itseisarvo $|a|$ on aina epänegatiivinen.

2) Kun $a \geq 0$, niin $|a| = a$. Siten $|a|^2 = a^2$.

   Kun $a < 0$, niin $|a| = -a$. Siten $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$.

Koska luku $|a|$ toteuttaa neliöjuuren määritelmän molemmat ehdot, niin $\sqrt{a^2} = |a|$. □

ESIMERKKI 2

Sievennä. **a)** $\sqrt{16 \cdot 49}$ **b)** $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ **d)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{98}}$

RATKAISU

a) $\sqrt{16 \cdot 49} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{49}$
$= 4 \cdot 7 = 28$
$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

b) $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

c) Kaavaa $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ voidaan käyttää myös oikealta vasemmalle.
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$
$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

d) Kaavaa $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ voidaan käyttää myös oikealta vasemmalle.
$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{98}} = \sqrt{\frac{2}{98}^{(2}} = \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

VASTAUS

a) 28 **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** 4 **d)** $\frac{1}{7}$

ESIMERKKI 3

Sievennä lauseke $\sqrt{x^2}$, kun **a)** $x = \frac{3}{4}$ **b)** $x = -7$ **c)** x on negatiivinen.

RATKAISU

a) $\sqrt{x^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$
$\sqrt{a^2} = |a|$

b) $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$
$\sqrt{a^2} = |a|$

c) Vaikka luku x on negatiivinen, niin luku x^2 on positiivinen ja $\sqrt{x^2}$ on määritelty. Negatiivisen luvun x itseisarvo on sen vastaluku $-x$.
$\sqrt{x^2} = |x| = -x$
$\sqrt{a^2} = |a|$

VASTAUS

a) $\frac{3}{4}$ **b)** 7 **c)** $-x$

ESIMERKKI 4

Osoita laskusääntöjen avulla, että **a)** $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ **b)** $\dfrac{15}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.

RATKAISU

a) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ $\quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

b) $\dfrac{15}{\sqrt{6}} \overset{\sqrt{6}}{=} \dfrac{15\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}\right)^2}$ Lavennetaan luvulla $\sqrt{6}$.

$= \dfrac{\overset{5}{\cancel{15}}\sqrt{6}}{\underset{2}{\cancel{6}}}$ Supistetaan luvulla 3.

$= \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

ESIMERKKI 5

Sievennä. **a)** $\sqrt{18} + \sqrt{12} - \sqrt{50} + \sqrt{48}$ **b)** $\sqrt{3}\left(5\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$

Huomaa!

Sopivan tulomuodon havaitsemista auttaa ensimmäisistä neliöluvuista tehty luettelo: 4, 9, 16, 25, … .

RATKAISU

a) $\sqrt{18} + \sqrt{12} - \sqrt{50} + \sqrt{48}$ Kirjoitetaan juurrettavat tuloina, joissa toisen tulontekijän neliöjuuri on mahdollisimman suuri kokonaisluku.

$= \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{16 \cdot 3}$

$= \sqrt{9}\sqrt{2} + \sqrt{4}\sqrt{3} - \sqrt{25}\sqrt{2} + \sqrt{16}\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ Yhdistetään samanmuotoiset termit.

$= -2\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$

b) $\sqrt{3}\left(5\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$ Poistetaan sulkeet.

$= 5\sqrt{3}\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{2}$ Lasketaan kertolaskut.

$= 5\left(\sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3 \cdot 2}$

$= 5 \cdot 3 + \sqrt{6}$

$= 15 + \sqrt{6}$

VASTAUS

a) $-2\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$ **b)** $15 + \sqrt{6}$

Harjoitustehtäviä

Sarja I

122. Sievennä.

E2 a) $\sqrt{64 \cdot 25}$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

123. Sievennä.

a) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ b) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ c) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$

124. Sievennä.

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{\sqrt{5}\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$

125. Sievennä.

E3 a) $\sqrt{16^2}$ b) $\sqrt{(-3)^2}$ c) $-\sqrt{13^2}$

126. Sievennä.

E4 a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{32}$ c) $\sqrt{75}$

127. Sievennä.

a) $\sqrt{5} + \sqrt{5}$ b) $7\sqrt{2} + \sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

128. Sievennä.

E5 a) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - \sqrt{5} + 3\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3} - 2\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$

129. Taikaneliössä jokaisella vaakarivillä, pystyrivillä ja lävistäjällä olevien lukujen tulo on yhtä suuri. Täydennä taikaneliö.

		$\sqrt{2}$
	4	
$8\sqrt{2}$		$\sqrt{32}$

130. Merkitse ja sievennä lukujen 8, 18 ja 50

▶ a) neliöjuurten summa

b) summan neliöjuuri.

131. Merkitse ja sievennä lukujen 48 ja 32

a) neliöjuurten erotus

b) erotuksen neliöjuuri.

132. Sievennä.

a) $\sqrt{48} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$

b) $\sqrt{1 + \sqrt{9}}$

133. Laske lausekkeen $2x^2$ arvo, kun

a) $x = \sqrt{5}$ b) $x = 3\sqrt{2}$.

Sarja II

134. Sievennä.

a) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ b) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ c) $\sqrt{1 + \frac{9}{16}}$

135. Sievennä.

a) $4\sqrt{12}\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{6}\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

136. Päättele luvun likiarvo, kun tiedetään, että luvun $\sqrt{3}$ kolmidesimaalinen likiarvo on 1,732.

a) $\sqrt{300}$ b) $\sqrt{30\,000}$ c) $\sqrt{0{,}03}$

137. Minkä luvun neliöjuuri on

a) $6\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $7\sqrt{2}$?

138. Olkoon $a = -3$. Laske lausekkeen arvo, mikäli se on mahdollista.

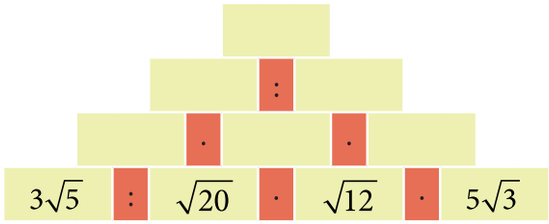
a) $3\sqrt{a^2}$ b) $\sqrt{3a^2}$ c) $(\sqrt{3a})^2$

139. Sievennä.

a) $\sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{2}$

b) $3\sqrt{2} \cdot \left(4\sqrt{5} - 2\sqrt{10}\right)$

140. Pyramidissa laskutoimituksen tulos tulee yläpuolella olevaan ruutuun. Täydennä pyramidi. Mikä luku tulee ylimpään ruutuun?



141. Merkitse ja sievennä.

a) luvun 7 kuution neliöjuuri

b) luvun 3 kahdeksannen potenssin neliöjuuri

c) luvun 3 viidennen potenssin neliöjuuri

142. Sievennä.

a) $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}$

c) $\dfrac{\sqrt{50}}{4}+\dfrac{\sqrt{72}}{8}$

143. Päättele lukujen $5\sqrt{3}$, $\sqrt{73}$ ja $6\sqrt{2}$ suuruusjärjestys ilman laskinta.

144. Laske lausekkeen $2x^2-5x+4$ arvo, kun

a) $x=\sqrt{3}$ **b)** $x=-2\sqrt{5}$.

145. Sievennä, kun $a>0$.

a) $\sqrt{12a}\cdot\sqrt{3a}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10a^5}}{\sqrt{2a}}$

146. Sievennä, kun $a\geq 0$.

a) $\sqrt{8a}\cdot\sqrt{5a^2}\cdot\sqrt{10a^3}$

b) $\sqrt{20a\sqrt{25a^2}}$

147. Osoita neliöjuuren määritelmän avulla, että

E1

a) $\sqrt{7^{104}}=7^{52}$ **b)** $\sqrt{(-3)^{314}}=3^{157}$.

148. Todista, että $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ kaikilla $a\geq 0$ ja $b>0$.

149. Osoita neliöjuuren laskusääntöjen avulla, että

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

b) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

c) $\dfrac{10\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=5\sqrt{10}$.

150. Osoita, että $\sqrt{28-10\sqrt{3}}=5-\sqrt{3}$.

2.3 Korkeammat juuret

TUTKIMUS

Tutkimus voidaan tehdä laskimen tai tietokoneen avulla.

1) Piirrä funktioiden x^3 ja x^4 kuvaajat. Kuvaile, mitä symmetriaa funktioiden kuvaajissa näet.

2) Piirrä funktion x^3 kuvaajan kanssa samaan koordinaatistoon suora $y = 6$. Kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä $x^3 = 6$? Määritä kuvaajasta yhtälön likimääräiset ratkaisut.

3) Ratkaise graafisesti yhtälö $x^3 = -5$ vastaavalla tavalla kuin kohdassa 2.

4) Piirrä funktion x^4 kuvaajan kanssa samaan koordinaatistoon suora $y = 3$. Kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä $x^4 = 3$? Määritä kuvaajasta yhtälön likimääräiset ratkaisut.

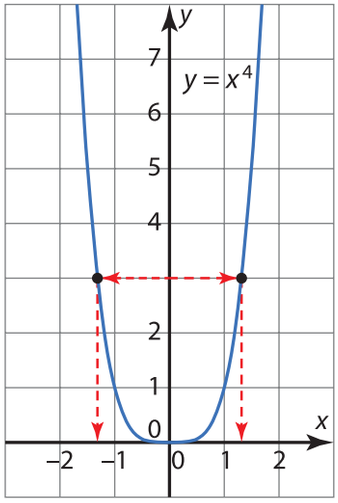
5) Ratkaise graafisesti yhtälö $x^4 = -1$ vastaavalla tavalla kuin kohdassa 4.

6) Kuinka yhtälön $x^3 = a$ ratkaisujen lukumäärä riippuu luvun a arvosta? Entä kuinka yhtälön $x^4 = a$ ratkaisujen lukumäärä riippuu luvun a arvosta?

Potenssifunktio ja n:s juuri

Potenssifunktio — Määritelmä

Funktio, jonka lauseke voidaan esittää muodossa x^n, jossa n on positiivinen kokonaisluku, on *potenssifunktio*.



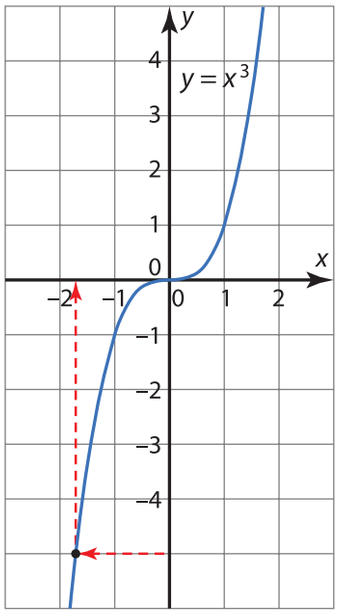
Parillisten potenssifunktioiden x^2, x^4, x^6, … kuvaajat ovat symmetrisiä y-akselin suhteen. Tämä johtuu siitä, että luvun ja sen vastaluvun parilliset potenssit ovat yhtä suuria positiivisia lukuja. Esimerkiksi $(-x)^4 = x^4$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

On olemassa kaksi lukua, jotka toteuttavat yhtälön $x^4 = 3$. Luvut ovat noin $1{,}3$ ja $-1{,}3$. Positiivista lukua sanotaan luvun 3 *neljänneksi juureksi* ja sitä merkitään $\sqrt[4]{3}$. Negatiivinen luku on neljännen juuren vastaluku $-\sqrt[4]{3}$.

Yhtälön $x^4 = 3$ ratkaisut ovat $x = \sqrt[4]{3} \approx 1{,}3$ ja $x = -\sqrt[4]{3} \approx -1{,}3$.

Yhtälön $x^4 = 0$ ratkaisu on $x = 0$.

Yhtälöllä $x^4 = -1$ ei ole ratkaisuja.



Parittomien potenssifunktioiden x^3, x^5, x^7, … kuvaajat ovat origon suhteen symmetrisiä. Tämä johtuu siitä, että luvun ja sen vastaluvun parittomat potenssit ovat toistensa vastalukuja. Esimerkiksi $(-x)^3 = -x^3$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

Yhtälön $x^3 = -5$ toteuttaa vain yksi luku. Luku on noin $-1{,}7$. Lukua sanotaan luvun -5 *kolmanneksi juureksi* ja sitä merkitään $\sqrt[3]{-5}$.

Siis yhtälön $x^3 = -5$ ratkaisu on $x = \sqrt[3]{-5} \approx -1{,}7$.

Yhtälön $x^3 = 0$ ratkaisu on $x = 0$.

Yhtälön $x^3 = 4$ ratkaisu on $x = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$.

Juuri $\sqrt[n]{a}$ — Määritelmä

Kun n on parillinen positiivinen kokonaisluku, luvun a *n:s juuri* $\sqrt[n]{a}$ on se epänegatiivinen luku, jonka n:s potenssi on a.
$\sqrt[n]{a}$ on määritelty, kun $a \geq 0$.

Kun n on pariton positiivinen kokonaisluku, luvun a *n:s juuri* $\sqrt[n]{a}$ on se luku, jonka n:s potenssi on a.
$\sqrt[n]{a}$ on määritelty luvun a kaikilla arvoilla.

n parillinen positiivinen kokonaisluku:
$\sqrt[n]{a} = b$, kun $b \geq 0$ ja $b^n = a$

n pariton positiivinen kokonaisluku:
$\sqrt[n]{a} = b$, kun $b^n = a$

ESIMERKKI 1

Kirjoita lauseke ja laske sen arvo.

a) luvun -1024 viides juuri

b) luvun 99 kolmas juuri

c) luvun 729 kuudes juuri

d) luvun -16 kahdeksas juuri

RATKAISU

a) Luvun -1024 viides juuri merkitään $\sqrt[5]{-1024}$.

Laskimella saadaan $\sqrt[5]{-1024} = -4$.

Tulos tarkoittaa, että $(-4)^5 = -1024$.

b) Luvun 99 kolmas juuri merkitään $\sqrt[3]{99}$.

Laskimella saadaan $\sqrt[3]{99} \approx 4{,}626$.

Juuren tarkka arvo on $\sqrt[3]{99}$ ja kolmidesimaalinen likiarvo $4{,}626$.

c) $\sqrt[6]{729} = 3$

Tulos tarkoittaa, että $3^6 = 729$.

d) Koska luku -16 on negatiivinen, kahdeksas juuri $\sqrt[8]{-16}$ ei ole määritelty.

VASTAUS

a) $\sqrt[5]{-1024} = -4$

b) $\sqrt[3]{99} \approx 4{,}626$

c) $\sqrt[6]{729} = 3$

d) Ei ole määritelty.

Nimityksiä

Kolmatta juurta $\sqrt[3]{a}$ sanotaan myös *kuutiojuureksi*.

Toisen juuren $\sqrt[2]{a}$ lyhyempi nimi on *neliöjuuri* ja yksinkertaisempi merkintä $\sqrt{a}$.

Potenssiyhtälön ratkaiseminen

Potenssiyhtälön $x^n = a$ ratkaiseminen

1) n parillinen positiivinen kokonaisluku

Kun $a \geq 0$, yhtälön $x^n = a$ toteuttavat luvun a n:s juuri ja sen vastaluku.

$$x^n = a$$
$$x = \sqrt[n]{a} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt[n]{a}$$

Kun $a < 0$, yhtälöä $x^n = a$ ei toteuta mikään reaaliluku.

2) n pariton positiivinen kokonaisluku

Yhtälön $x^n = a$ toteuttaa luvun a n:s juuri.

$$x^n = a$$
$$x = \sqrt[n]{a}$$

Huomaa, että kun n on parillinen, niin yhtälön $x^n = a$ ratkaisujen lukumäärä riippuu luvun a merkistä. Kun n on pariton, niin yhtälöllä $x^n = a$ on aina yksi ratkaisu riippumatta a:n arvosta.

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö. **a)** $x^8 = 17$ **b)** $4x^5 + 128 = 0$

RATKAISU

a) $x^8 = 17$ — Yhtälöllä on kaksi ratkaisua.

$x = \sqrt[8]{17}$ tai $x = -\sqrt[8]{17}$ — Juurten tarkat arvot

b) $4x^5 + 128 = 0$ — Ratkaistaan ensin x^5.

$4x^5 = -128 \quad | : 4$

$x^5 = -32$ — Yhtälöllä on yksi ratkaisu.

$x = \sqrt[5]{-32} = -2$ — Juuren tarkka arvo

VASTAUS

a) $x = \sqrt[8]{17}$ tai $x = -\sqrt[8]{17}$ **b)** $x = -2$

Geometrinen jono ja summa

Geometrisen jonon yleisen termin ja summan kaavat:

$a_n = a_1 q^{n-1}$

$S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$

ESIMERKKI 3

Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$ ja neljäs jäsen $a_4 = -192$. Määritä jonon

a) suhdeluku q

b) seitsemäs jäsen a_7.

RATKAISU

a) Geometrisen jonon neljännen jäsenen lauseke on $a_4 = a_1 q^3$. Sijoitetaan $a_1 = 3$ ja $a_4 = -192$, ja ratkaistaan q.

$3 \cdot q^3 = -192 \quad | : 3$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskimella.

$q^3 = -64$

$q = \sqrt[3]{-64} = -4$

b) Lasketaan jonon seitsemäs jäsen.

$a_7 = a_1 q^6 = 3 \cdot (-4)^6 = 12\,288$

VASTAUS

a) $q = -4$ **b)** $a_7 = 12\,288$

ESIMERKKI 4

Salman syntyessä isoisä tallettaa 1500 euroa tilille, jolla on kiinteä korko. Salma saa tyhjentää tilin täyttäessään 18 vuotta. Kuinka suuri koron tulisi olla, jotta talletuksen arvo kasvaisi 3600 euroon? Korosta maksettavaa lähdeveroa ei tarvitse ottaa huomioon.

RATKAISU

Salman ensimmäisen elinvuoden alussa talletuksen arvo a_1 on 1500 euroa. 19. vuoden alussa talletuksen arvo a_{19} on 3600 euroa.

Merkitään vuosittaista korkokerrointa kirjaimella q. Kun korko vuosittain lisätään pääomaan, talletuksen arvo tulee aina q-kertaiseksi. Muodostuu geometrinen jono, jossa $a_{19} = a_1 q^{18}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan q.

$1500 \cdot q^{18} = 3600 \quad | : 1500$

Yhtälö voidaan ratkaista myös laskimella.

$q^{18} = 2{,}4$

$q = \sqrt[18]{2{,}4} \approx 1{,}050 \quad$ tai $\quad q = -\sqrt[18]{2{,}4} \approx -1{,}050$

Ratkaisun tulee sisältää vastaus esitettyyn kysymykseen: "Koron tulisi olla 5,0 %".

Vain positiivinen juuri voidaan tulkita korkokertoimeksi. Talletuksen arvo tulee joka vuosi 1,050-kertaiseksi, joten se on 105,0 % edellisestä arvosta. Koron tulisi olla 5,0 %.

VASTAUS

Koron tulisi olla 5,0 %.

Harjoitustehtäviä

Sarja I

151. Piirrä laskimella funktion $f(x) = x^3$ kuvaaja. Määritä kuvaajasta kymmenesosan tarkkuudella
a) funktion arvot $f(-2{,}5)$ ja $f(2{,}5)$
b) funktion arvot kohdissa $x = -0{,}5$ ja $x = 0{,}5$
c) kohta, jossa funktio saa arvon 8
d) yhtälön $x^3 = -4$ juuri.

152. E1 Määritä juuren tarkka arvo ja likiarvo tuhannesosan tarkkuudella.
a) luvun -35 seitsemäs juuri
b) luvun 34 kuudes juuri
c) luvun -625 neljäs juuri
d) luvun 5 viides juuri

153. ▶ **a)** Määritä $\sqrt[6]{4096}$. Mitkä luvut toteuttavat yhtälön $x^6 = 4096$?
b) Määritä $\sqrt[6]{-4096}$. Mitkä luvut toteuttavat yhtälön $x^6 = -4096$?
c) Määritä $\sqrt[7]{128}$. Mitkä luvut toteuttavat yhtälön $x^7 = 128$?
d) Määritä $\sqrt[7]{-128}$. Mitkä luvut toteuttavat yhtälön $x^7 = -128$?

154. E2 Ratkaise yhtälö. Anna vastaukseksi tarkka arvo.
a) $7x^4 = 56$ **b)** $x^7 - 28 = 0$
c) $3x^8 - 21 = 0$ **d)** $10x^3 + 170 = 0$

155. E3 Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$ ja yhdeksäs jäsen $a_9 = 6561$. Määritä jonon
a) suhdeluku q
b) kolmas jäsen a_3.

156. Geometrisen jonon neljäs jäsen $a_4 = 1000$ ja seitsemäs jäsen $a_7 = 64$. Määritä jonon
a) suhdeluku q
b) ensimmäinen jäsen a_1.

157. E4 Pankkitilille talletetaan 3600 euroa seitsemäksi vuodeksi. Kuinka suuri korkoprosentin tulisi olla, jotta talletuksen arvo kasvaisi 6000 euroon? Korosta maksettavaa lähdeveroa ei oteta huomioon.

158. ▶ Uuden matkapuhelimen hinta oli 422 euroa, kun se tuli myyntiin kuusi kuukautta sitten. Puhelinta myydään nyt 211 euron hinnalla. Kuinka monta prosenttia hinta on laskenut keskimäärin kuukaudessa?

Sarja II

159. Piirrä laskimella funktion $f(x) = x^4$ kuvaaja. Määritä kuvaajasta yhden desimaalin tarkkuudella
a) funktion arvot $f(-1{,}6)$ ja $f(1{,}6)$
b) funktion arvot kohdissa $-0{,}8$ ja $0{,}8$
c) yhtälön $x^4 = 9$ juuret.

160. Määritä juuren tarkka arvo ja likiarvo tuhannesosan tarkkuudella.
a) luvun 64 neljäs juuri
b) luvun $-32\,768$ viides juuri
c) luvun 12 kolmas juuri
d) luvun -729 kuudes juuri

161. Ratkaise yhtälö. Anna vastaukseksi tarkka arvo.
a) $16x^4 = 32$
b) $3x^7 - 150 = 0$
c) $6x^5 + 42 = 0$

162. Ratkaise yhtälö.

a) $(x-2)^3 = 0$

b) $(x-2)^3 = 27$

c) $(x-2)^3 = 5$

163. Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 16$ ja viides jäsen $a_5 = 81$. Määritä jonon viiden ensimmäisen jäsenen summa S_5.

164. Geometrinen jonon 13. jäsen $a_{13} = 3$ ja 20. jäsen $a_{20} = 2$. Laske geometrisen summan $a_{13} + a_{14} + \ldots + a_{20}$ arvo sadasosan tarkkuudella.

165. Oheisen tilaston mukaan maapallon väkiluku seitsenkertaistui noin kahdessa sadassa vuodessa. Kuinka monta prosenttia väkiluku kasvoi keskimäärin vuodessa vuosien

a) 1800 ja 2010

b) 1960 ja 1980

c) 2000 ja 2010 välisenä aikana?

Vuosi	Väkiluku (miljardia)
1800	0,98
1960	3,02
1980	4,44
2000	6,12
2010	6,91

Lähde: Suomen tilastollinen vuosikirja 2009

166. Tšernobylin ydinvoimalaonnettomuuden jälkeen tuulet kuljettivat Suomeen cesiumin radioaktiivista isotooppia 137. Vuonna 1987 eräillä alueilla Hämeessä laskeuman radioaktiivisuus oli 78 kBq/m^2. Vuonna 2006 tämä oli laskenut arvoon 51 kBq/m^2. Radioaktiivisuus vähenee joka vuosi yhtä monta prosenttia. Kuinka suuri laskeuman radioaktiivisuus on vuonna 2016?

167. Positiivisten lukujen *geometrinen keskiarvo* määritellään seuraavasti: Jos lukuja on n kappaletta, niiden geometrinen keskiarvo on lukujen tulon n:s juuri. Laske lukujen

a) 4 ja 5

b) 4, 5 ja 6

c) 4, 5, 6 ja 7

geometrinen keskiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

168. Kahden positiivisen luvun a ja b *keskiverto* on positiivinen luku, joka toteuttaa yhtälön $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

Ratkaise yhtälö. Mikä yhteys on kahden positiivisen luvun keskiverron ja geometrisen keskiarvon välillä?

169. **a)** Osakkeen arvo nousi 1. vuosineljänneksen aikana *keskimäärin* 4,9 % kuukaudessa. Miten luku 4,9 % on laskettu? Millaista keskiarvoa sana *keskimäärin* tarkoittaa tässä yhteydessä?

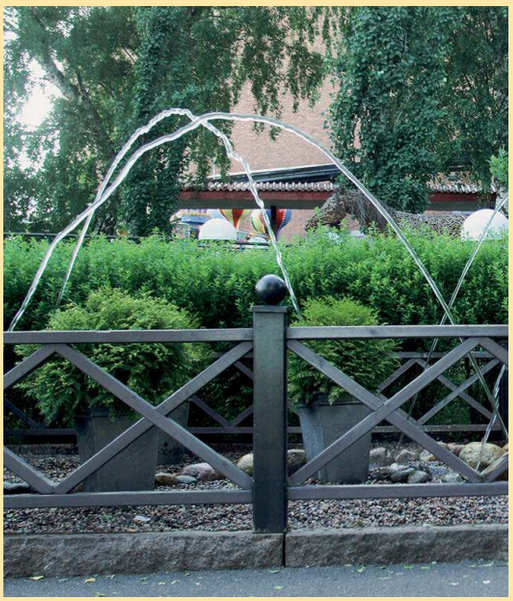
b) Kuinka monta prosenttia osakkeen arvo keskimäärin nousi tai laski 2. vuosineljänneksen aikana?

Aika	Osakkeen arvon muutos
1. vuosineljännes	
tammikuu	+10,7 %
helmikuu	+3,3 %
maaliskuu	+1,0 %
2. vuosineljännes	
huhtikuu	+2,3 %
toukokuu	+16,2 %
kesäkuu	−18,5 %

3 Toisen asteen polynomifunktio

Tässä luvussa tutkitaan toisen asteen polynomifunktion nollakohtia ja merkkiä kuvaajan, yhtälöiden, epäyhtälöiden ja diskriminantin avulla. Harjoitustehtävissä kerrataan muun muassa aritmeettista jonoa ja summaa.

3.1 Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja



TUTKIMUS

Suihkulähteen vesisuihku on funktion $f(x) = -0{,}5x^2 + 4{,}5x$ kuvaajan muotoinen, kun vesisuihkun alkupiste on origossa ja akseleiden yksikkönä on desimetri.

1) Piirrä vesisuihku ruutupaperille. Laske piirtämistä varten funktion arvoja $f(0), f(1), f(2), f(3), \ldots$. Mieti, kuinka voit helpottaa laskemista ja piirtämistä vesisuihkun symmetrian avulla.

2) Määritä kuvaajan korkeimman pisteen x- ja y-koordinaatti. Käytä apuna kuvaajan symmetriaa.

3) Kuinka korkealle vesisuihku nousee ja kuinka kauas se kantaa?

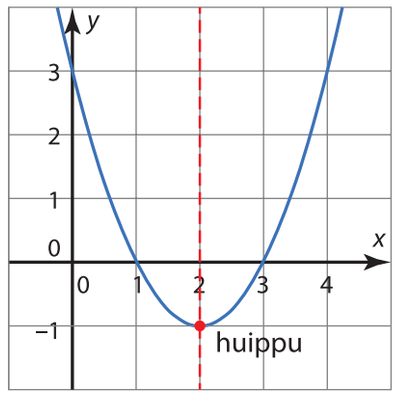
Toisen asteen polynomifunktio ja paraabeli

Funktio, jonka lauseke voidaan esittää muodossa $ax^2 + bx + c$, jossa $a \neq 0$, on *toisen asteen polynomifunktio*.

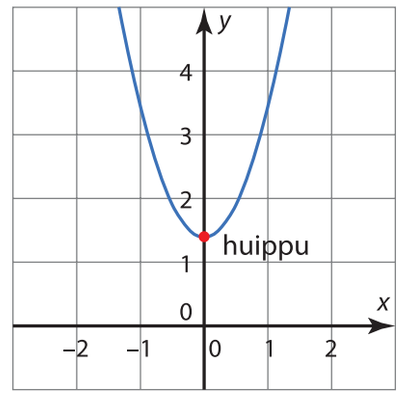
Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on *paraabeli*. Paraabelilla on *huippu*, jonka kohdalla paraabelin kulkusuunta kääntyy. Paraabeli on symmetrinen huipun kautta kulkevan y-akselin suuntaisen suoran suhteen.

Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaajaparaabeli

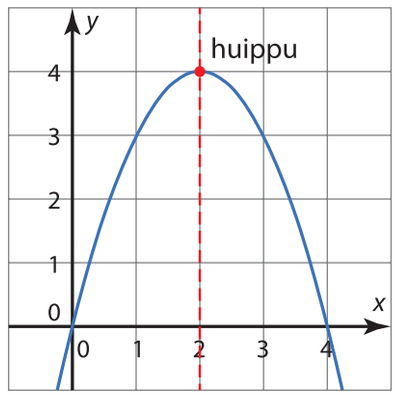
- *aukeaa ylöspäin*, kun toisen asteen termin kerroin a on positiivinen eli $a > 0$
- *aukeaa alaspäin*, kun toisen asteen termin kerroin a on negatiivinen eli $a < 0$.



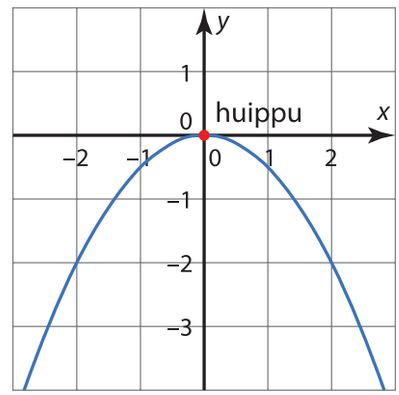
Funktiossa $f(x) = x^2 - 4x + 3$ on $a = 1$. Paraabeli aukeaa ylöspäin. Huippu on pisteessä $(2, -1)$.



Funktiossa $f(x) = 2x^2 + 1{,}4$ on $a = 2$. Paraabeli aukeaa ylöspäin. Huippu on pisteessä $(0; 1{,}4)$.



Funktiossa $f(x) = -x^2 + 4x$ on $a = -1$. Paraabeli aukeaa alaspäin. Huippu on pisteessä $(2, 4)$.



Funktiossa $f(x) = -0{,}5x^2$ on $a = -0{,}5$. Paraabeli aukeaa alaspäin. Huippu on pisteessä $(0, 0)$.

Toisen asteen yhtälön juurten lukumäärä

ESIMERKKI 1

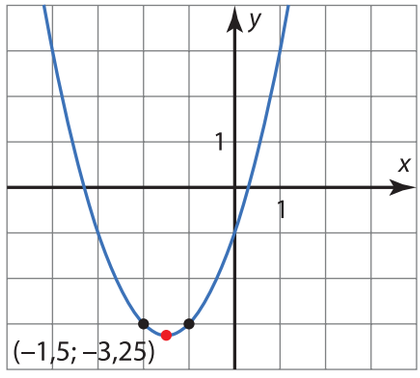
Piirrä funktion $f(x) = x^2 + 3x - 1$ kuvaaja. Määritä kuvaajan perusteella

a) kuvaajaparaabelin huipun koordinaatit

b) yhtälön $x^2 + 3x - 1 = 0$ juuret kymmenesosan tarkkuudella. Kuinka monta juurta yhtälöllä on?

RATKAISU

a) Piirretään funktion $f(x) = x^2 + 3x - 1$ kuvaaja laskimella.

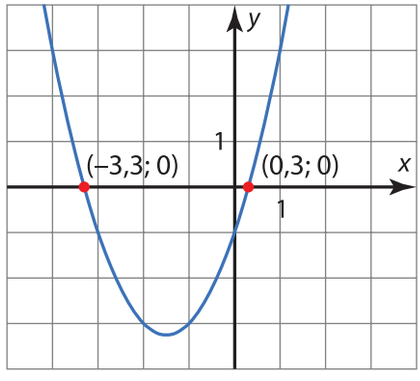


Kuvaaja kulkee pisteiden $(-2, -3)$ ja $(-1, -3)$ kautta. Koska pisteiden y-koordinaatit ovat samat, niin symmetrian perusteella huipun x-koordinaatti on $\frac{-2 + (-1)}{2} = -1{,}5$.

Huipun y-koordinaatti on funktion arvo $f(-1{,}5) = -3{,}25$.

Huippu on pisteessä $(-1{,}5; -3{,}25)$.

b) Yhtälö $x^2 + 3x - 1 = 0$ toteutuu niillä muuttujan x arvoilla, joilla funktion $f(x) = x^2 + 3x - 1$ arvo on nolla. Funktion arvo on nolla kuvaajan ja x-akselin leikkauspisteessä.



Funktion kuvaaja leikkaa x-akselin likimain pisteissä $(-3{,}3; 0)$ ja $(0{,}3; 0)$. Siten yhtälöllä on kaksi juurta. Juurten likiarvot ovat $x \approx -3{,}3$ ja $x \approx 0{,}3$.

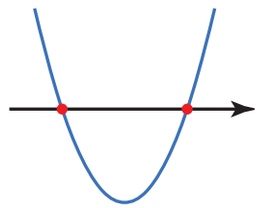
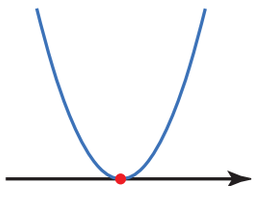
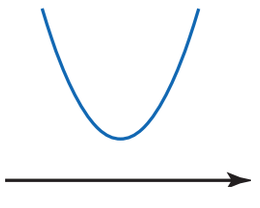
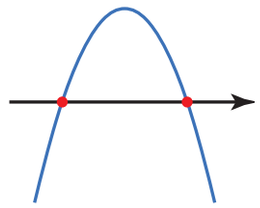
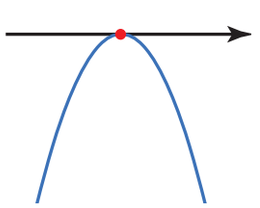
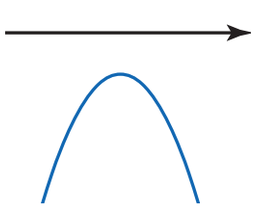
VASTAUS

a) $(-1{,}5; -3{,}25)$ **b)** kaksi juurta: $x \approx -3{,}3$ ja $x \approx 0{,}3$

Toisen asteen yhtälö Määritelmä

Yhtälö, joka voidaan esittää muodossa $ax^2 + bx + c = 0$, jossa $a \neq 0$, on *toisen asteen yhtälö*.

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juuret ovat toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ nollakohtia. Toisen asteen yhtälöllä on kaksi, yksi tai ei yhtään juurta.

Kaksi juurta	Yksi juuri	Ei yhtään juurta
		
		

Seuraavassa esimerkissä kerrataan, miten funktion merkki voidaan päätellä kuvaajan perusteella. Lisäksi esitellään uusi tapa merkitä lukusuoran yhtenäisiä osia eli *välejä*.

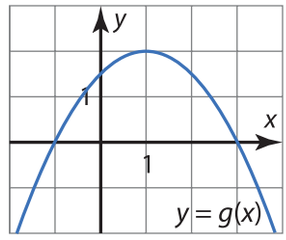
ESIMERKKI 2

Piirrä funktion $g(x) = -0{,}5x^2 + x + 1{,}5$ kuvaaja. Päättele kuvaajan perusteella, millä muuttujan x arvoilla funktion g arvot ovat

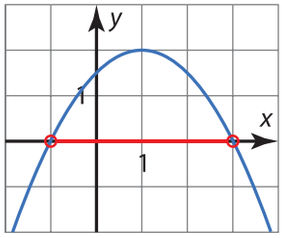
a) positiivisia
b) negatiivisia
c) epänegatiivisia.

RATKAISU

Piirretään funktion $g(x) = -0{,}5x^2 + x + 1{,}5$ kuvaaja laskimella. Funktion arvo kohdassa x on kuvaajan pisteen y-koordinaatti.



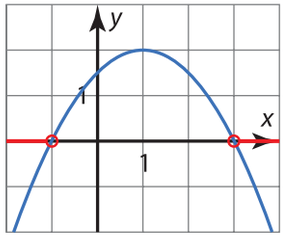
a) Funktion arvo on positiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselin yläpuolella.



Funktion g arvot ovat positiivisia, kun $-1 < x < 3$.

Lukusuoran yhtenäinen osa eli väli $-1 < x < 3$ voidaan merkitä myös $]-1, 3[$. Päätepisteet -1 ja 3 eivät kuulu tähän väliin.

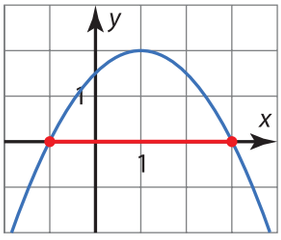
b) Funktion arvo on negatiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselin alapuolella.



Funktion g arvot ovat negatiivisia, kun $x < -1$ tai $x > 3$.

Lukusuoran väli $x < -1$ voidaan merkitä myös $]-\infty, -1[$ ja väli $x > 3$ vastaavasti $]3, \infty[$. Merkki ∞ on rajattomuuden (äärettömyyden) symboli. Välit jatkuvat toiseen suuntaan rajatta.

c) Funktion arvo on epänegatiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselilla tai sen yläpuolella.



Funktion g arvot ovat epänegatiivisia, kun $-1 \le x \le 3$.

Lukusuoran väli $-1 \le x \le 3$ voidaan merkitä myös $[-1, 3]$. Päätepisteet -1 ja 3 kuuluvat tähän väliin.

VASTAUS

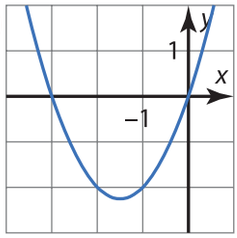
a) $-1 < x < 3$ **b)** $x < -1$ tai $x > 3$ **c)** $-1 \le x \le 3$

Harjoitustehtäviä

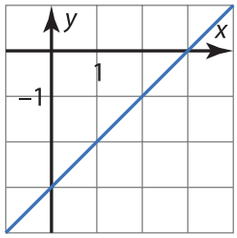
Sarja I

170. Tunnista funktioiden $f(x) = -x^2 + 3$, $g(x) = x^2 + 3x$, $h(x) = -2x + 3$ ja $i(x) = x - 3$ kuvaajat.

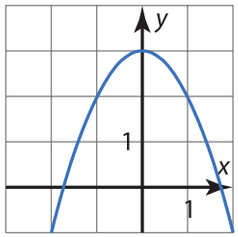
a)



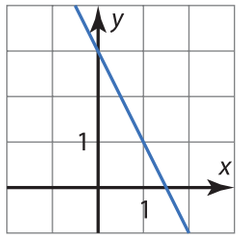
b)



c)



d)



171. E1 Piirrä funktion $f(x) = x^2 + 2x - 3$ kuvaaja. Määritä kuvaajan avulla

a) kuvaajaparaabelin huipun koordinaatit

b) yhtälön $x^2 + 2x - 3 = 0$ juuret. Kuinka monta juurta yhtälöllä on?

172. Piirrä funktion $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x - 2$ kuvaaja. Määritä kuvaajan avulla

a) kuvaajaparaabelin huipun koordinaatit

b) yhtälön $-0{,}5x^2 + 2x - 2 = 0$ juuret. Kuinka monta juurta yhtälöllä on?

173. E2 Piirrä funktion $g(x) = 0{,}5x^2 + x - 1{,}5$ kuvaaja. Päättele kuvaajan perusteella, millä muuttujan x arvoilla funktion g arvot ovat

a) negatiivisia

b) positiivisia

c) epänegatiivisia.

174. Piirrä funktion $g(x) = x^2 - 4x + 4$ kuvaaja. Päättele kuvaajan perusteella, millä muuttujan x arvoilla funktion g arvo on

a) nolla

b) positiivinen

c) negatiivinen.

175. Valitse luvulle c jokin sellainen arvo, että funktiolla $f(x) = -x^2 + c$ on

a) kaksi nollakohtaa

b) yksi nollakohta

c) ei yhtään nollakohtaa.

176. **a)** Tutki aluksi paraabelia $y = ax^2$. Sijoita kertoimen a paikalle positiivisia ja negatiivisia lukuja ja piirrä vastaavat paraabelit. Kuinka parametrin a arvo vaikuttaa paraabelin muotoon ja aukeamissuuntaan?

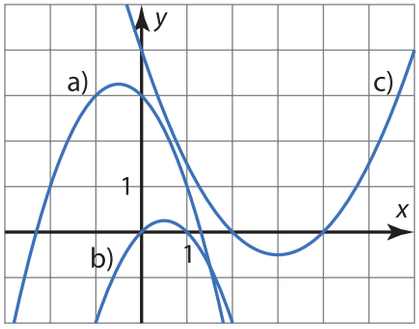
b) Tutki seuraavaksi paraabelia $y = x^2 + c$. Sijoita vakion c paikalle positiivisia ja negatiivisia lukuja ja piirrä vastaavat paraabelit. Kuinka parametrin c arvo vaikuttaa paraabeliin?

c) Tutki lopuksi paraabelia $y = ax^2 + c$. Anna parametreille a ja c eri arvoja ja tutki, ovatko edellä tekemäsi päätelmät yhä voimassa.

d) Etsi parametreille a ja c sellaiset arvot, että paraabelin huippu on pisteessä $(0, -3)$ ja paraabeli kulkee pisteen $(2, -5)$ kautta.

Sarja II

177. Tunnista funktioiden $f(x) = -x^2 - x + 3$, $g(x) = x - x^2$ ja $h(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4$ kuvaajat.



178. Piirrä funktion $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ kuvaaja. Määritä kuvaajan avulla

a) kuvaajaparaabelin huipun koordinaatit

b) yhtälön $-x^2 - 2x + 5 = 0$ juuret kymmenesosan tarkkuudella. Kuinka monta juurta yhtälöllä on?

179. Piirrä funktion $f(x) = 4x^2 + 12x + 9$ kuvaaja. Päättele kuvaajan perusteella, millä muuttujan x arvoilla funktion f arvo on

a) positiivinen

b) epänegatiivinen

c) epäpositiivinen.

180. Tietunnelin kohtisuora poikkileikkaus on paraabelin $y = -0{,}5x^2 + 5$ ja x-akselin rajaaman alueen muotoinen, kun akseleiden yksikkönä on metri.

a) Piirrä paraabeli ja määritä tunnelin korkeus ja leveys 10 cm:n tarkkuudella.

b) Mahtuuko kuorma-auto, jonka leveys on 2,60 m ja korkeus 4,00 m, ajamaan tunnelin läpi?

181. Ratkaise yhtälö.

a) $x^2 = 25$

b) $(x - 3)^2 = 25$

c) $(x + 4)^2 = 25$

182. Ratkaise yhtälö.

a) $(3x - 1)^2 = 0$

b) $(3x - 1)^2 = 4$

c) $(3x - 1)^2 = -4$

183. Valitse luvulle c jokin sellainen arvo, että yhtälöllä $8x^2 + c = 15$ on

a) kaksi juurta

b) yksi juuri

c) ei yhtään juurta.

184. Valitse luvulle k sellainen arvo, että funktioiden $f(x) = (x - 3)^2$ ja $g(x) = -6x + k$ arvot ovat yhtä suuret vain yhdessä kohdassa. Mikä tämä kohta on?

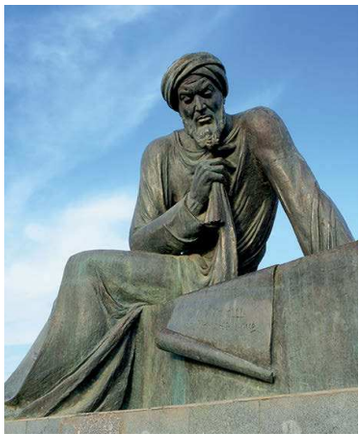
185. **a)** Tutki aluksi paraabelia $y = ax^2 + 2x + 1$. Sijoita kertoimen a paikalle positiivisia ja negatiivisia lukuja ja piirrä vastaavat paraabelit. Kuinka parametrin a arvo vaikuttaa paraabelin muotoon ja aukeamissuuntaan?

b) Tutki paraabelia $y = x^2 + 2x + c$. Kuinka parametrin c arvo vaikuttaa paraabeliin?

c) Tutki paraabelia $y = x^2 + bx$. Kuinka parametrin b arvo vaikuttaa paraabelin nollakohtien ja huipun sijaintiin?

d) Tutki lopuksi paraabelia $y = ax^2 + bx$. Anna parametreille a ja b eri arvoja ja tutki, ovatko edellä tekemäsi päätelmät yhä voimassa.

3.2 Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava



Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan esitti persialainen Abu Abdullah Muhammad bin Musa al-Khwarizmi arabiankielisessä teoksessaan Al-jabr (latinaksi Algebra) 800-luvun alussa.

Euroopassa ratkaisukaava tuli tunnetuksi 1200-luvulla, kun arabiankielisiä kirjoituksia käännettiin ja tutkittiin yliopistoissa. Yhtälöiden ratkaiseminen helpottui, kun käännösten myötä intialaiset numerot (0, 1, 2, 3, …) saapuivat Eurooppaan ja syrjäyttivät roomalaisten numeroiden (I, II, III, IV, ...) käytön.

Seuraavaksi tutustutaan *toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan*, jolla voidaan ratkaista kaikki toisen asteen yhtälöt. Esimerkeissä 1, 2 ja 3 ratkaisukaavaa sovelletaan eri tilanteisiin. Ratkaisukaava johdetaan esimerkkien jälkeen kappaleen lopussa.

Ratkaisukaavan käyttäminen

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava — **Lause**

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$, jossa $a \neq 0$, juuret saadaan sijoittamalla kertoimet a, b ja c kaavaan

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ESIMERKKI 1

Ratkaise yhtälö $3x^2 - x - 10 = 0$.

RATKAISU

Yhtälön $3x^2 - x - 10 = 0$ toisen asteen termi on $3 \cdot x^2$, ensimmäisen asteen termi on $-1 \cdot x$ ja vakiotermi on -10. Yhtälön kertoimet ovat $a = 3$, $b = -1$ ja $c = -10$.

$$3x^2 - x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sijoitetaan ratkaisukaavaan $a = 3$, $b = -1$ ja $c = -10$.

$$= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{1 \pm 11}{6}$$

$$x = \frac{1+11}{6} = \frac{12}{6} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-11}{6} = -\frac{10}{6} \overset{(2}{=} -\frac{5}{3}$$

VASTAUS

$x = 2$ tai $x = -\frac{5}{3}$

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö **a)** $3(1-x)=x^2$ **b)** $x^2+2=2x$.

Huomaa!
Toisen asteen yhtälö on ensin muokattava muotoon $ax^2+bx+c=0$. Vasta sen jälkeen voidaan soveltaa ratkaisukaavaa.

RATKAISU

a)

$3(1-x)=x^2$ — Aloitetaan poistamalla sulkeet.

$3-3x=x^2$ — Siirretään termejä niin, että yhtälön toiselle puolelle tulee nolla.

$-x^2-3x+3=0 \quad |\cdot(-1)$ — Kun yhtälö kerrotaan luvulla -1, ratkaisukaavan nimittäjäksi $2a$ saadaan positiivinen luku.

$x^2+3x-3=0$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ — Sijoitetaan ratkaisukaavaan $a=1$, $b=3$ ja $c=-3$.

$=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}$

$=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$

$x=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$ tai $x=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}$

b)

$x^2+2=2x$ — Järjestetään termit.

$x^2-2x+2=0$

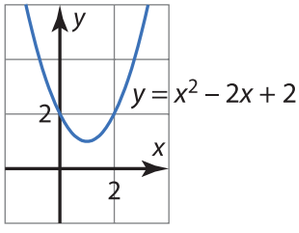
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ — Sijoitetaan ratkaisukaavaan $a=1$, $b=-2$ ja $c=2$.

$=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$

$=\dfrac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$

Koska lukua $\sqrt{-4}$ ei ole määritelty, yhtälöllä ei ole juuria.

Graafinen tarkistus



VASTAUS

a) $x=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$ tai $x=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}$ **b)** Ei juuria.

ESIMERKKI 3

Ratkaise yhtälö $(x-3)^2 = 8$.

RATKAISU

Tapa 1. Yhtälö voidaan ratkaista ratkaisukaavalla.

$(x-3)^2 = 8$ — Poistetaan sulkeet. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$x^2 - 6x + 9 = 8$ — Siirretään termejä niin, että yhtälön oikealle puolelle tulee nolla.

$x^2 - 6x + 1 = 0$ — Yhtälön kertoimet ovat $a = 1$, $b = -6$ ja $c = 1$.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2}$$ — Yhtälön juuria voidaan vielä sieventää.

$$= \frac{6 \pm \sqrt{16 \cdot 2}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$ — Kirjoitetaan osoittaja tulomuotoon, minkä jälkeen supistetaan.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(3 \pm 2\sqrt{2})}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$x = 3 + 2\sqrt{2}$ tai $x = 3 - 2\sqrt{2}$ — Yhtälön juuret sievennettyinä.

Tapa 2. Yhtälön juuret voidaan päätellä myös ilman ratkaisukaavaa.

$(x-3)^2 = 8$ — Yhtälö toteutuu, kun $x - 3$ on luvun 8 neliöjuuri tai neliöjuuren vastaluku.

$x - 3 = \sqrt{8}$ tai $x - 3 = -\sqrt{8}$ — Ratkaistaan x.

$x = 3 + \sqrt{8}$ tai $x = 3 - \sqrt{8}$ — Sievennetään neliöjuuret.

$x = 3 + 2\sqrt{2}$ tai $x = 3 - 2\sqrt{2}$

VASTAUS

$x = 3 + 2\sqrt{2}$ tai $x = 3 - 2\sqrt{2}$

Ratkaisukaavan johtaminen

Ratkaisukaavan johtaminen perustuu ideaan, jota käytettiin esimerkin 3 ratkaisutavassa 2:

$(x-3)^2 = 8$ — Yhtälö toteutuu, kun $x-3$ on luvun 8 neliöjuuri tai neliöjuuren vastaluku.

$x-3 = \sqrt{8}$ tai $x-3 = -\sqrt{8}$

Ratkaisukaava saadaan, kun yhtälö $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$, muokataan muotoon $(2ax+b)^2 = b^2-4ac$, minkä jälkeen päätellään binomin $2ax+b$ arvo. Lopuksi ratkaistaan muuttuja x.

$ax^2+bx+c=0$ — Vähennetään yhtälön molemmilta puolilta termi c.

$ax^2+bx=-c$ — Kerrotaan yhtälö luvulla $4a$.

$4a^2x^2+4abx=-4ac$ — $4a^2x^2=(2ax)^2$ ja $4abx=2\cdot 2ax\cdot b$

$(2ax)^2+2\cdot 2ax\cdot b=-4ac$ — Lisätään yhtälön molemmille puolille termi b^2.

$(2ax)^2+2\cdot 2ax\cdot b+b^2=b^2-4ac$ — Yhtälön vasempaan puoleen voidaan soveltaa muistikaavaa $u^2+2uv+v^2=(u+v)^2$. Yhtälön vasen puoli on binomin $2ax+b$ neliö.

$(2ax+b)^2=b^2-4ac$ — Yhtälö toteutuu, kun $2ax+b$ on oikean puolen neliöjuuri tai neliöjuuren vastaluku. Tämä on mahdollista silloin, kun $b^2-4ac \geq 0$.

$2ax+b=\sqrt{b^2-4ac}$ tai $2ax+b=-\sqrt{b^2-4ac}$

Ratkaistaan kummastakin yhtälöstä x.

$2ax=-b+\sqrt{b^2-4ac}$ tai $2ax=-b-\sqrt{b^2-4ac}$ $\quad | : 2a\ (\neq 0)$

$x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ tai $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Juuret voidaan yhdistää yhdeksi lausekkeeksi $\pm$ -merkin avulla.

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\square$

Harjoitustehtäviä

Sarja I

186. Ratkaise yhtälö.
E1
a) $x^2 - 4x + 3 = 0$
b) $5x^2 + x - 4 = 0$

187. Ratkaise yhtälö.
E2
a) $x^2 + 3 = 5x$
b) $3x^2 + 2x = -1$

188. Ratkaise yhtälö.
a) $x^2 + 9x = 0$
b) $4y^2 - 5y + 1 = 1$

189. Ratkaise yhtälö.
a) $(x + 3)^2 = 12x$
b) $(x + 2)(x - 2) = 3x$

190. Määritä funktion nollakohdat.
a) $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$
b) $g(x) = 7x^2 - 56$

191. Ratkaise yhtälö.
E3
a) $(x + 1)^2 = 5$
b) $x^2 + 1 = 4x$

192. Juuso esitteli perheensä: ”Minulla on kaksi siskoa. Heidän ikänsä toteuttavat seuraavan ehdon: Kun ikä kerrotaan luvulla 14 ja tulosta vähennetään 33, saadaan iän neliö.” Määritä siskojen iät.

193. Millä vakion a arvoilla funktion $f(t) = at^2 + a^2t + 18$ arvo kohdassa -3 on 6?

194. Millä vakion a arvolla luku 2 on yhtälön $(x - a)(x + 1) = 15$ juuri? Määritä yhtälön toinen juuri.

Sarja II

195. Ratkaise yhtälö.
a) $x^2 + x - 6 = 0$
b) $6x^2 - x - 1 = 0$

196. Ratkaise yhtälö.
a) $5x^2 = -x$
b) $x^2 + x = 2 - 2x^2$

197. Ratkaise yhtälö.
a) $(x - 3)^2 = 3$
b) $x^2 = 1 - 2x$

198. Millä muuttujan t arvoilla funktion $h(t) = -t^2 + 10t$ arvo on a) 0 b) 30 c) 25?

199. Ratkaise yhtälö.
a) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$
b) $\frac{x^2}{2} - \frac{x-3}{12} = \frac{1}{3}$

200. Millä muuttujan x arvoilla funktioiden $f(x) = (x - 4)^2$ ja $g(x) = (3 - x)(3 + x)$ arvot ovat yhtä suuret?

201. Aino esitteli perheensä: ”Minulla on kaksi veljeä. Heidän ikänsä toteuttavat seuraavan ehdon: Kun iän neliöön lisätään luku 14, saadaan ikä yhdeksänkertaisena.” Määritä veljien iät.

202. Isoisä kertoi syntyneensä ennen talvisotaa ja että hänen syntymävuotensa oli kahden peräkkäisen parittoman luvun tulo. Mikä on isoisän syntymävuosi?

203. Luonnollisia lukuja x, y ja z, jotka toteuttavat yhtälön $x^2 + y^2 = z^2$, kutsutaan *Pythagoraan luvuiksi*. Määritä kaikki peräkkäiset luonnolliset luvut, jotka ovat Pythagoraan lukuja.

204. Määritä vakio a niin, että funktiolla $f(t) = 5(t + a)(t - 3)$ on nollakohta -1. Millä muuttujan t arvoilla funktio saa tällöin arvon 30?

205. Määritä vakiolle a sellainen arvo, että funktiolla $g(x) = 2x^2 - ax - a^2$ on nollakohta -3. Mikä on tällöin funktion toinen nollakohta?

206. Osoita, että vakion a arvosta riippumatta muuttujan arvo $x = -1$ toteuttaa yhtälön $x^2 - (a^2 - 1)x - a^2 = 0$. Millä vakion a arvolla yhtälön toinen juuri on $x = 2$?

3.3 Toisen asteen epäyhtälö

Toisen asteen epäyhtälössä on merkki $<$, $>$, $\leq$ tai $\geq$, ja muuttujan korkein potenssi on 2. Toisen asteen epäyhtälöitä ovat esimerkiksi $3x^2 - 5x + 2 > 0$, $x^2 \leq 1$ ja $3k^2 + 4k \geq 0$.

ESIMERKKI 1

Ratkaise epäyhtälö $2x^2 + x - 3 < 0$.

RATKAISU

On ratkaistava, milloin funktion $f(x) = 2x^2 + x - 3$ arvot ovat negatiivisia. Polynomifunktion merkki voi vaihtua vain funktion nollakohdissa. Määritetään funktion $f(x) = 2x^2 + x - 3$ nollakohdat.

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

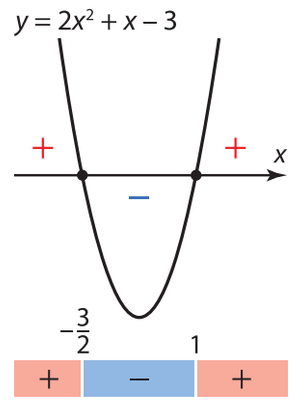
$$x = -\frac{3}{2} \text{ tai } x = 1$$

Hahmotellaan polynomifunktion $f(x) = 2x^2 + x - 3$ kuvaaja. Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin 2 on positiivinen.

Paraabeli leikkaa x-akselin kohdissa

$x = -\frac{3}{2}$ ja $x = 1$.

Funktion arvo on negatiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselin alapuolella.



Funktion nollakohdat jakavat lukusuoran (x-akselin) osaväleihin. Laaditaan funktion merkkikaavio ja merkitään siihen funktion arvon merkki jokaisella osavälillä.

Funktion $f(x) = 2x^2 + x - 3$ arvot ovat negatiivisia, kun $-\frac{3}{2} < x < 1$.

VASTAUS

$-\frac{3}{2} < x < 1$

Toisen asteen epäyhtälö ratkaistaan seuraavalla menetelmällä:

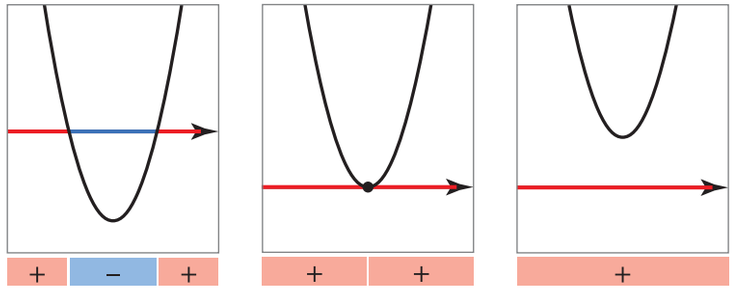
1. Kirjoitetaan epäyhtälö muotoon, jossa epäyhtälön vasempana puolena on toisen asteen polynomi $ax^2 + bx + c$ ja oikeana puolena on nolla.
2. Ratkaistaan toisen asteen polynomifunktion nollakohdat ratkaisemalla yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Hahmotellaan tutkittavan toisen asteen polynomifunktion kuvaaja $y = ax^2 + bx + c$.
4. Laaditaan kuvaajan avulla polynomifunktion merkkikaavio.

Polynomifunktion merkki voi muuttua vain nollakohdissa.

- Funktion arvot ovat positiiviset, kun kuvaaja on x-akselin yläpuolella.
- Funktion arvot ovat negatiiviset, kun kuvaaja on x-akselin alapuolella.

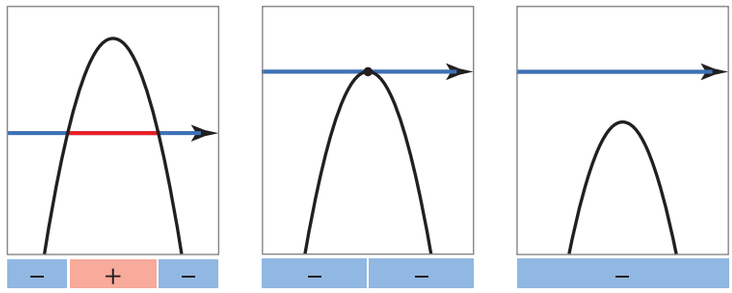
Saadaan jokin seuraavista tapauksista:

$a > 0$
ylöspäin
aukeava
paraabeli



kaksi nollakohtaa **yksi nollakohta** **ei nollakohtia**

$a < 0$
alaspäin
aukeava
paraabeli



ESIMERKKI 2

Ratkaise epäyhtälö $x^2 > 5$.

RATKAISU

$x^2 > 5$ — Kirjoitetaan epäyhtälö muotoon, jossa oikea puoli on 0.

$x^2 - 5 > 0$

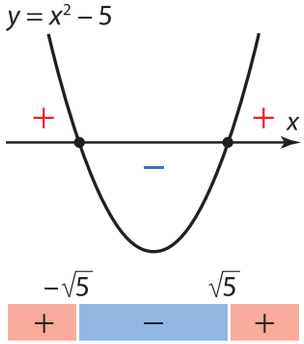
On ratkaistava, milloin funktion $f(x) = x^2 - 5$ arvot ovat positiivisia. Määritetään funktion $f(x) = x^2 - 5$ nollakohdat.

$x^2 - 5 = 0$ — Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 = 5$

$x = -\sqrt{5}$ tai $x = \sqrt{5}$

Funktion $f(x) = x^2 - 5$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka leikkaa x-akselin kohdissa $x = -\sqrt{5}$ ja $x = \sqrt{5}$.



Hahmotellaan kuvaaja.

Laaditaan merkkikaavio.

Funktion $f(x) = x^2 - 5$ arvot ovat positiivisia, kun $x < -\sqrt{5}$ tai $x > \sqrt{5}$.

VASTAUS

$x < -\sqrt{5}$ tai $x > \sqrt{5}$

ESIMERKKI 3

Ratkaise epäyhtälö $6x \geq x^2 + 9$.

RATKAISU

$$6x \geq x^2 + 9$$

Kirjoitetaan epäyhtälö muotoon, jossa oikea puoli on 0.

$$-x^2 + 6x - 9 \geq 0$$

On ratkaistava, milloin funktion $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ arvot ovat positiivisia tai nolla.

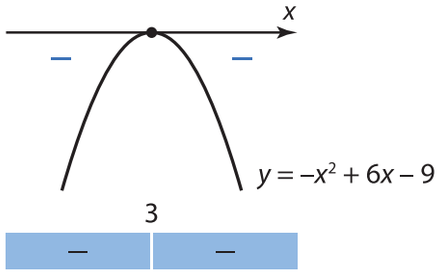
Määritetään funktion $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ nollakohdat.

$$-x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka ainoa nollakohta on $x = 3$.

Hahmotellaan kuvaaja ja laaditaan merkkikaavio.



Funktio saa arvon nolla, kun $x = 3$. Funktio ei saa millään muuttujan x arvoilla positiivisia arvoja. Epäyhtälö $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$ toteutuu, kun $x = 3$.

VASTAUS

$x = 3$

Harjoitustehtäviä

Sarja I

207. Millä muuttujan arvoilla funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$ arvot ovat positiivisia?

208. Millä muuttujan arvoilla funktion $f(x) = 2x^2 + 6x$ arvot ovat negatiivisia?

209. Ratkaise epäyhtälö.

a) $2x^2 + x - 3 \geq 0$

b) $-x^2 + 9x - 8 < 0$

210. Ratkaise epäyhtälö.

a) $x^2 \leq 9$

b) $12 > 3x^2$

211. Ratkaise epäyhtälö.

a) $x^2 + 4 > 4x$

b) $x(x + 2) \leq -1$

212. Ratkaise epäyhtälö.

a) $(x - 2)^2 < 9$

b) $(2x + 1)^2 \geq x^2$

213. Osoita, että funktio $f(x) = 7x - (x + 2)^2$ saa vain negatiivisia arvoja.

214. Määritä ne positiiviset kokonaisluvut, jotka lisättynä neliöönsä antavat summaksi korkeintaan 30.

215. Millä muuttujan arvoilla funktio f on määritelty?

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$

b) $f(x) = \sqrt{10 - x(17 - 3x)}$

Sarja II

216. Ratkaise epäyhtälö.

a) $2x^2 - 10x + 12 \geq 0$

b) $x^2 < -x$

217. Ratkaise epäyhtälö.

a) $x^2 < \frac{1}{4}$

b) $x(6 - x) \leq 9$

218. Ratkaise epäyhtälö.

a) $(x - 5)^2 > 3 - x^2$

b) $(x - 1)^2 \leq 2x - 3$

219. Osoita, että funktio $f(x) = x(x - 6) + 9$ ei saa negatiivisia arvoja.

220. Ratkaise kaksoisepäyhtälö $-1 < x^2 - 5x + 5 < 1$.

221. Millä muuttujan arvoilla funktio f on määritelty?

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6x^2 + 11x - 10}}$

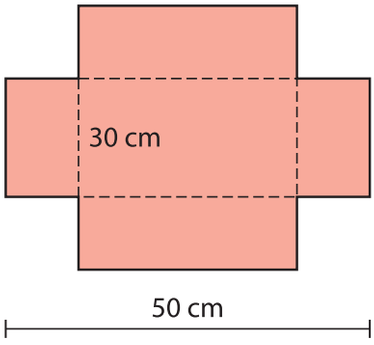
b) $f(x) = \sqrt{2x - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

222. Määritä ne positiiviset luvut, joiden neliö on pienempi kuin luku itse.

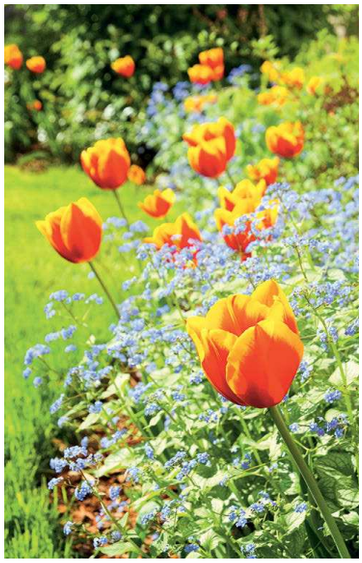
223. Määritä ne positiiviset luvut, jotka neliöstään vähennettynä antavat erotukseksi vähintään 20.

224. Pallo heitetään suoraan ylöspäin. Pallon korkeus metreinä t sekunnin kuluttua on $24t - 4{,}9t^2$. Kuinka kauan pallo on yli 5 m:n korkeudella?

225. Sara tekee laatikon pahvista. Laatikon leveyden tulee olla 30 cm ja tilavuuden vähintään 6 litraa. Saralla on käytettävissä pahvirulla, jonka leveys on 50 cm. Sara leikkaa ensin pahvista suorakulmion muotoisen palan ja sitten nurkista pois neliön muotoiset palat. Määritä pois leikattavan neliön sivun pituus. Kuinka pitkän palan pahvia Sara tarvitsee?



3.4 Sovelluksia

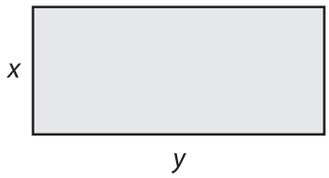


ESIMERKKI 1

Suorakulmion muotoista kukkapenkkiä kiertävän aidan pituus on 6,4 m. Kukkapenkin pinta-ala on 2,4 m^2. Mitkä ovat kukkapenkin mitat?

RATKAISU

Piirretään kuva. Merkitään suorakulmion leveyttä ja pituutta kirjaimilla x ja y (m).



Aidan pituus on $2x + 2y = 6{,}4$.
Pinta-ala on $xy = 2{,}4$.

Suorakulmion piiri on 6,4 m. Ratkaistaan muuttuja y.

$$2x + 2y = 6{,}4$$
$$y = 3{,}2 - x$$

Suorakulmion pinta-ala on 2,4 m^2. Ratkaistaan muuttuja x.

$$xy = 2{,}4 \qquad \text{Sijoitetaan } y = 3{,}2 - x.$$
$$x(3{,}2 - x) = 2{,}4$$
$$-x^2 + 3{,}2x - 2{,}4 = 0 \qquad \text{Ratkaistaan laskimella tai ratkaisukaavalla.}$$
$$x = 2{,}0 \text{ tai } x = 1{,}2$$

Jos leveys x on 2,0 (m), niin pituus on
$y = 3{,}2 - x = 3{,}2 - 2{,}0 = 1{,}2$ (m).

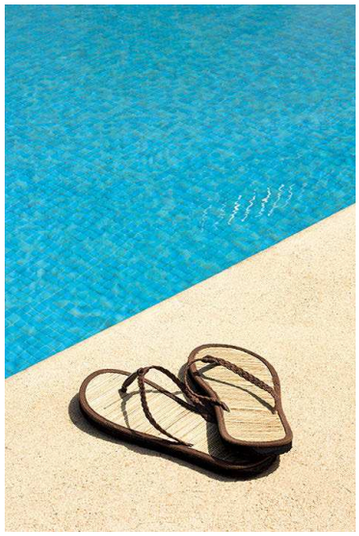
Jos leveys x on 1,2 (m), niin pituus on
$y = 3{,}2 - x = 3{,}2 - 1{,}2 = 2{,}0$ (m).

Molemmissa tapauksissa sivujen pituudet ovat 1,2 m ja 2,0 m.

VASTAUS

Sivujen pituudet ovat 1,2 m ja 2,0 m.

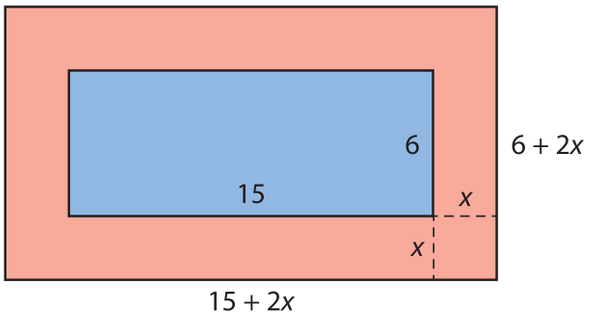
ESIMERKKI 2



Suorakulmion muotoisen uima-altaan pituus on 15,0 m ja leveys 6,0 m. Allas ympäröidään joka puolelta tasalevyisellä laatoituksella. Laattoja on käytettävissä 120 m^2. Kuinka leveä laatoituksesta tulee? Anna vastaus kymmenen senttimetrin tarkkuudella.

RATKAISU

Piirretään kuva. Merkitään laatoituksen leveyttä kirjaimella x (m).



Laatoituksen ulkoreuna on suorakulmio, jonka pituus on $15 + 2x$ (m) ja leveys $6 + 2x$ (m). Laatoituksen pinta-ala saadaan, kun tämän suorakulmion pinta-alasta vähennetään uima-altaan pinta-ala.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$(15+2x)(6+2x)-15\cdot 6=120$ Pinta-ala on 120 m^2.

$4x^2+42x-120=0$ Ratkaistaan laskimella tai ratkaisukaavalla.

$x \approx 2{,}34$ tai $x \approx -12{,}84$

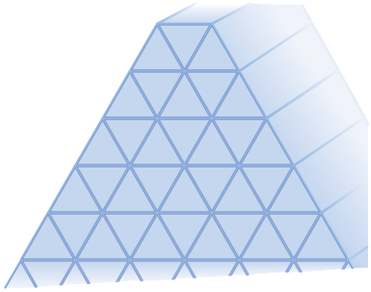
Negatiivinen juuri ei voi olla laatoituksen leveys.

Laatoituksen leveys on 2,3 m.

VASTAUS

Laatoituksen leveys on 2,3 m.

ESIMERKKI 3



Kauppias kokoaa 800:sta suklaarasiasta mahdollisimman korkean keon, jonka ylimmässä kerroksessa on kolme rasiaa ja seuraavassa alemmassa kerroksessa aina kaksi rasiaa enemmän kuin edellisessä.

a) Kuinka monta kerrosta keossa on?

b) Kuinka monta rasiaa jää yli?

RATKAISU

a) Rasioiden lukumäärät 3, 5, 7, ... muodostavat aritmeettisen jonon, jonka n:s jäsen on

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 1. \qquad a_1 = 3,\ d = 2$$

Olkoon keossa n kerrosta. Rasioiden lukumäärä keossa on aritmeettinen summa

$$S_n = 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) \qquad a_1 = 3,\ a_n = 2n + 1$$
$$= n \cdot \frac{3 + (2n + 1)}{2} = \frac{2n^2 + 4n}{2} = n^2 + 2n.$$

Ratkaistaan, millä n:n arvolla rasioiden lukumäärä on enintään 800.

$$n^2 + 2n \le 800$$

$$n^2 + 2n - 800 \le 0 \qquad \text{Ratkaistaan laskimella tai merkkikaavion avulla.}$$

$$-29{,}3 \le n \le 27{,}3 \qquad \text{Ratkaisun likiarvot.}$$

Suurin mahdollinen arvo on $n = 27$. Keossa on 27 kerrosta.

b) Lasketaan keossa olevien rasioiden määrä.
$S_{27} = 27^2 + 2 \cdot 27 = 783$

Lasketaan yli jäävien rasioiden määrä.
$800 - 783 = 17$

VASTAUS

a) Keossa on 27 kerrosta.

b) 17 rasiaa jää yli.

Aritmeettinen jono ja summa

Aritmeettisen jonon yleisen termin ja summan kaavat:

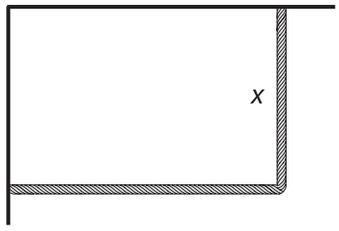
$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$S_n = n \frac{a_1 + a_n}{2}$

Harjoitustehtäviä

Sarja I

226. E1 **a)** Köydellä, jonka pituus on 18 m, rajataan hallin nurkkaan suorakulmion muotoinen alue. Merkitään alueen leveyttä kirjaimella x (m). Ilmaise lausekkeena alueen pituus ja pinta-ala.



b) Köydellä, jonka pituus on 126 m, ympäröidään suorakulmion muotoinen alue. Merkitään alueen leveyttä kirjaimella x (m). Ilmaise lausekkeena alueen pituus ja pinta-ala.

227. Suorakulmion muotoisen pelikentän ympäröimiseen tarvitaan 164 m verkkoaitaa. Kentän pinta-ala on 1600 m^2.

a) Kentän leveys on x metriä. Ilmaise lausekkeena kentän pinta-ala.

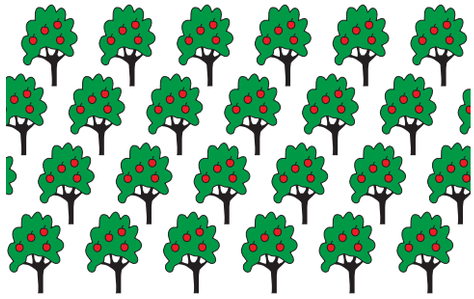
b) Muodosta pinta-alasta yhtälö ja ratkaise muuttuja x.

c) Määritä kentän mitat.

228. Suorakulmion muotoiseen puutarhaan on istutettu 144 omenapuuta tasavälein suoriin riveihin. Pituussuunnassa puutarhaan mahtuu puita riviin 7 enemmän kuin leveyssuunnassa.

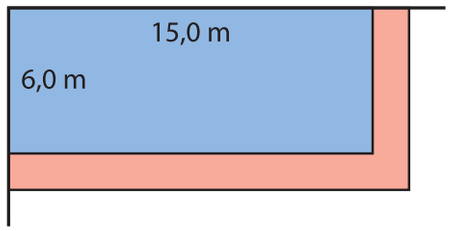
a) Leveyssuuntaisessa rivissä on x omenapuuta. Ilmaise lausekkeena omenapuiden kokonaismäärä.

b) Muodosta puiden kokonaismäärästä yhtälö ja ratkaise muuttuja x.



229. E2 Suorakulmion muotoista puistoa ympäröi tasalevyinen jalkakäytävä. Puiston pituus on 50 m ja leveys 34 m. Puiston ja jalkakäytävän yhteenlaskettu pinta-ala on 2145 m^2. Määritä jalkakäytävän leveys.

230. Suorakulmion muotoisen uima-altaan pituus on 15,0 m ja leveys 6,0 m. Allasta rajoittaa kahdelta sivulta rakennuksen seinä. Kahdelle muulle sivulle laatoitettiin tasalevyinen käytävä. Laattoja käytettiin 41,0 m^2. Määritä käytävän leveys.



231. Matilla on kana ja kani, joille hän rakentaa aitauksen pihalle talon seinää vasten. Aitaus on suorakulmion muotoinen, ja se on jaettu seinää vastaan kohtisuoralla aidalla kahteen osaan. Matilla on käytettävissä 15 m aitaa. Aitauksen pinta-alan tulee olla vähintään 12 m^2. Määritä aitauksen seinän suuntaisen sivun pituus.

232. E3
a) Määritä aritmeettisen jonon $-2, 1, 4, \ldots$ n:s jäsen.
b) Kuinka monta jonon alkupään jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa ylittää arvon 1000?

233. Kuinka mones jäsen ns. kolmiolukujen jonossa ylittää arvon 10 000?

Sarja II

234. Köydellä, jonka pituus on 200 m, halutaan rajata suorakulmion muotoinen alue, jonka pinta ala on 2356 m^2. Määritä alueen mitat.

235. Sotilassoittokunta marssi täyteen ahdettuna suorakulmiona, jonka rintaman leveys oli 8 soittajaa pienempi kuin syvyys. Musiikin raikuessa osasto kääntyi ja järjestäytyi uudeksi rivistöksi, jonka leveys oli 15 soittajaa enemmän kuin äsken ja syvyys 4 soittajaa. Kuinka monta soittajaa soittokuntaan kuului?

236. Vauvan sänkyä peitti tilkkupeitto, jonka pituus oli 80 cm ja leveys 60 cm. Lapsen kasvettua peittoa suurennettiin ompelemalla tilkkupeiton ympärille kangaskaistale, joka oli päädyissä kaksi kertaa niin leveä kuin sivuilla. Peiton pinta-ala kaksinkertaistui. Määritä peiton uudet mitat.

237. Suorakulmion muotoisen puiston pituus on 340 m ja leveys 200 m. Puiston halkaisee yksi pituussuuntainen ja kaksi leveyssuuntaista yhtä leveää kävelytietä. Kävelyteiden yhteenlaskettu pinta-ala on 1620 m^2. Määritä kävelyteiden leveys.

238. Suorakulmion muotoisen peilin leveys on 60 cm ja korkeus 80 cm. Peili halutaan kehystää kullatuin kehyksin. Lehtikultaa riittää 0,250 m^2:n kultaamiseen. Kuinka leveä kehys voidaan korkeintaan tehdä? Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.

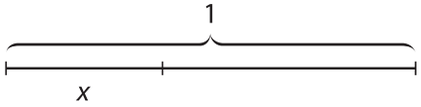
239. Pyöreä peili, jonka halkaisija on 64 cm, halutaan kehystää kullatuin kehyksin. Lehtikultaa riittää 0,250 m^2:n kultaamiseen. Kuinka leveä kehys voi korkeintaan olla? Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella. Ympyrän pinta-ala on πr^2, missä r on ympyrän säde.

240. Koulun juhlasaliin järjestetään 728 tuolia niin, että ensimmäisessä rivissä on 23 tuolia ja seuraavassa rivissä on aina kolme tuolia enemmän kuin edellisessä. Kuinka moneen riviin tuolit riittävät? Kuinka monta tuolia on viimeisessä rivissä?

241. Kuinka mones jäsen ns. kuusikulmiolukujen jonossa ylittää arvon 10 000?

242. Kuvataiteessa, arkkitehtuurissa ja musiikissa on antiikista lähtien käytetty *kultaista leikkausta*, joka on tietty tapa jakaa jana (patsaan korkeus, sävellyksen kesto tms.) kahteen osaan.
Kultainen leikkaus tarkoittaa jakoa, jossa janan lyhyemmän osan suhde pitempään osaan on yhtä suuri kuin pitemmän osan suhde koko janaan.

a) Jana, jonka pituus on 1, jaetaan kultaisen leikkauksen suhteessa. Laske osien pituuksien likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.



b) Antiikin kauneusihanteen mukaan kehonosien tuli noudattaa kultaisen leikkauksen suhdetta. Tutki, noudattaako kehosi kultaisen leikkauksen suhdetta. Mittaa esimerkiksi etäisyydet keskisormen kärjestä ranteeseen ja kyynärpäähän tai päälaesta napaan ja kantapäähän.

243. YK:n päärakennus New Yorkissa on suorakulmaisen särmiön muotoinen. Rakennuksen korkeuden suhde leveyteen on yhtä suuri kuin leveyden suhde korkeuden ja leveyden erotukseen. Rakennuksen korkeus on 166 metriä. Määritä rakennuksen leveys.

244. Siunauskappelin pääty on tasakylkisen kolmion muotoinen. Kolmion kannan suhde kyljen pituuteen on yhtä suuri kuin kyljen pituuden suhde kannan ja kyljen pituuden summaan. Kolmion kanta on 7,27 m. Määritä kyljen pituus.

245. Kaksinumeroisessa luvussa numeroiden summa on 10. Kun numerot pannaan vastakkaiseen järjestykseen ja alkuperäinen ja uusi luku kerrotaan keskenään, saadaan tuloksi 2944. Määritä alkuperäinen luku.

3.5 Diskriminantti

TUTKIMUS

1) Tutki ratkaisukaavan avulla, kuinka monta juurta on yhtälöllä
a) $x^2 - 10x + 25 = 0$ **b)** $4x^2 - 3x + 1 = 0$.

2) Toisen asteen yhtälön juurten lukumäärä voidaan päätellä yhtälöä ratkaisematta. Kuinka juurten lukumäärän näkee ratkaisukaavasta?

3) Valitse vakiolle c jokin sellainen arvo, että yhtälöllä $x^2 + 4x + c = 0$ on

a) vain yksi juuri
b) kaksi juurta
c) ei yhtään juurta.

4) Valitse vakiolle b jokin sellainen arvo, että yhtälöllä $1{,}5x^2 + bx + 6 = 0$ on

a) vain yksi juuri
b) kaksi juurta
c) ei yhtään juurta.

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$, jossa $a \neq 0$, juurten lukumäärä riippuu ratkaisukaavassa

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

juurrettavana olevan lausekkeen $b^2 - 4ac$ arvosta. Tätä lauseketta kutsutaan *diskriminantiksi*.

Esimerkiksi yhtälöllä $x^2 - 10x + 25 = 0$ on yksi juuri, koska ratkaisukaavassa juurrettavaksi tulee nolla: $x = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = 5$.

Yhtälöllä $4x^2 - 3x + 1 = 0$ ei ole yhtään juurta, koska ratkaisukaavassa juurrettavaksi tulee negatiivinen luku: $x = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{8}$.

Diskriminantti Määritelmä

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ *diskriminantti* on $D = b^2 - 4ac$.

Diskriminantti ja toisen asteen yhtälön juurten lukumäärä Lause

Kun diskriminantin arvo on
- positiivinen, toisen asteen yhtälöllä on kaksi juurta
- nolla, toisen asteen yhtälöllä on yksi juuri
- negatiivinen, toisen asteen yhtälöllä ei ole juuria.

ESIMERKKI 1

Laske yhtälön $8x^2 + 13{,}005 = 20{,}4x$ diskriminantti. Kuinka monta juurta yhtälöllä on?

RATKAISU

$8x^2 + 13{,}005 = 20{,}4x$ — Saatetaan yhtälö muotoon $ax^2 + bx + c = 0$.

$8x^2 - 20{,}4x + 13{,}005 = 0$ — Yhtälön kertoimet ovat $a = 8$, $b = -20{,}4$ ja $c = 13{,}005$.

Lasketaan yhtälön diskriminantti.

$D = b^2 - 4ac = (-20{,}4)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 13{,}005 = 0$

Koska yhtälön diskriminantti on nolla, niin yhtälöllä on yksi juuri.

VASTAUS

yksi juuri

ESIMERKKI 2

Millä vakion k arvoilla yhtälöllä $5x^2 + kx + 1 = 0$ on vähintään yksi juuri?

RATKAISU

Lasketaan yhtälön $5x^2 + kx + 1 = 0$ diskriminantti.

$D = b^2 - 4ac$ Sijoitetaan $a = 5$, $b = k$ ja $c = 1$.

$= k^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1$

$= k^2 - 20$

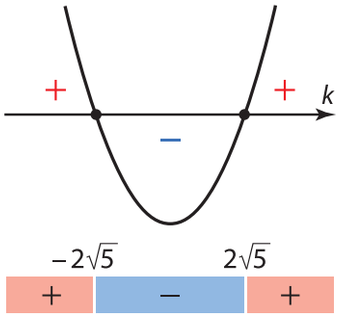
Toisen asteen yhtälöllä on yksi juuri, kun diskriminantti on nolla, ja kaksi juurta, kun diskriminantti on positiivinen. Siksi on ratkaistava, millä vakion k arvoilla diskriminantti $k^2 - 20 \geq 0$.

Määritetään funktion $k^2 - 20$ nollakohdat.

$k^2 - 20 = 0$

$k^2 = 20$

$k = -\sqrt{20} = -2\sqrt{5}$ tai $k = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$



Hahmotellaan funktion $k^2 - 20$ kuvaaja ja laaditaan merkkikaavio.

Epäyhtälö $k^2 - 20 \geq 0$ toteutuu, kun $k \leq -2\sqrt{5}$ tai $k \geq 2\sqrt{5}$.

Yhtälöllä $5x^2 + kx + 1 = 0$ on vähintään yksi juuri, kun $k \leq -2\sqrt{5}$ tai $k \geq 2\sqrt{5}$.

VASTAUS

$k \leq -2\sqrt{5}$ tai $k \geq 2\sqrt{5}$

ESIMERKKI 3

Millä vakion p arvoilla yhtälöllä $px^2 + 12x + 12 - p = 0$ on täsmälleen yksi juuri? Muodosta näitä p:n arvoja vastaavat yhtälöt ja ratkaise ne.

RATKAISU

Yhtälö $px^2 + 12x + 12 - p = 0$ on toisen asteen yhtälö vain, jos $p \neq 0$. Siksi on tutkittava erikseen tapaukset $p \neq 0$ ja $p = 0$.

1) Oletetaan ensin, että $p \neq 0$.

Lasketaan yhtälön $px^2 + 12x + 12 - p = 0$ diskriminantti.

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac && \text{Sijoitetaan } a = p,\ b = 12 \text{ ja } c = 12 - p. \\ &= 12^2 - 4p(12 - p) \\ &= 144 - 48p + 4p^2 \\ &= 4p^2 - 48p + 144 \end{aligned}$$

Yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri, kun diskriminantti saa arvon nolla. Ratkaistaan vakio p.

$$\begin{aligned} 4p^2 - 48p + 144 &= 0 && \text{Ratkaistaan laskimella tai} \\ p &= 6 && \text{ratkaisukaavalla.} \end{aligned}$$

Muodostetaan arvoa $p = 6$ vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} px^2 + 12x + 12 - p &= 0 && \text{Sijoitetaan } p = 6. \\ 6x^2 + 12x + 6 &= 0 && \text{Ratkaistaan laskimella tai} \\ x &= -1 && \text{ratkaisukaavalla.} \end{aligned}$$

Näin on saatu selville, että arvoa $p = 6$ vastaa yhtälö $6x^2 + 12x + 6 = 0$, jonka ainoa juuri on $x = -1$.

2) Oletetaan seuraavaksi, että $p = 0$.

Muodostetaan arvoa $p = 0$ vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} px^2 + 12x + 12 - p &= 0 && \text{Sijoitetaan } p = 0. \\ 12x + 12 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Siis arvoa $p = 0$ vastaa yhtälö $12x + 12 = 0$, jonka ainoa juuri on $x = -1$.

VASTAUS

Yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri, kun $p = 6$ tai $p = 0$.

Arvoa $p = 6$ vastaa yhtälö $6x^2 + 12x + 6 = 0$, jonka juuri on $x = -1$.

Arvoa $p = 0$ vastaa yhtälö $12x + 12 = 0$, jonka juuri on $x = -1$.

Harjoitustehtäviä

Sarja I

246. E1 Laske yhtälön diskriminantti. Kuinka monta juurta yhtälöllä on?
a) $214x^2 - 102x + 12 = 0$
b) $0{,}9x^2 + 14{,}4 = 7{,}2x$

247. ▶ Laske yhtälön diskriminantti. Kuinka monta juurta yhtälöllä on?
a) $13{,}4x^2 = 4 - 2{,}57x$
b) $8x(1 - 3x) = 0$

248. Kuinka monta juurta yhtälöllä on?
a) $x^2 - 6x + 12 = x^2$
b) $3x^2 + x - 81 = x$

249. E2 ▶ Millä vakion q arvoilla yhtälöllä $4x^2 - 8x + q = 0$ on
a) kaksi juurta
b) yksi juuri
c) enintään yksi juuri?

250. Millä vakion k arvoilla funktiolla $f(x) = -4x^2 + kx - 1$ ei ole yhtään nollakohtaa?

251. E3 Millä vakion p arvoilla yhtälöllä $3x^2 + px + 12 = 0$ on täsmälleen yksi juuri? Muodosta näitä p:n arvoja vastaavat yhtälöt ja ratkaise ne.

252. ▶ Osoita, että funktio $f(x) = x(12 - 3x)$ ei saa arvoa 13.

253. Määritä kerroin b siten, että paraabelin $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx - 12$ huippu on x-akselilla. Piirrä paraabeli laskimella.

254. Mikä ehto vakion k tulee täyttää, että funktion $g(x) = x^2 + 3kx + 4$ kuvaaja on kokonaan x-akselin yläpuolella? Tarkista piirtämällä kuvaaja laskimella.

Sarja II

255. Laske yhtälön diskriminantti. Kuinka monta juurta yhtälöllä on?
a) $4{,}02x^2 + 8{,}14x + 5{,}03 = 0$
b) $3x^2 + 14x = 11$

256. Kuinka monta juurta yhtälöllä on?
a) $x^3 - 12x^2 + 9 = x^3 - 4x$
b) $2x^3 + x^2 + 6 = x^3 + x^2$

257. Millä vakion c arvoilla funktiolla $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - 3x + c$ on
a) kaksi nollakohtaa
b) ei yhtään nollakohtaa
c) vähintään yksi nollakohta?

258. Millä vakion b arvoilla funktiolla $g(x) = x^2 + bx + 9$ on kaksi nollakohtaa?

259. Saako funktio $f(x) = -3x^2 + 42x - 5$ arvon a) 143 b) 142 c) 141?

260. Mikä ehto vakion c tulee täyttää, että funktio $f(x) = 6x^2 - 24x + c$ saa arvon 210?

261. Mikä ehto vakion q tulee täyttää, että funktioiden $f(x) = -x^2 + 3x + 7$ ja $g(x) = 5x + q$ kuvaajilla on yksi yhteinen piste? Mikä tämä piste on? Piirrä kuvaajat.

262. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $ax^2 + (a-3)x + 1 = 0$ on yksi juuri? Muodosta näitä a:n arvoja vastaavat yhtälöt ja ratkaise ne.

263. Millä vakion a arvoilla funktiolla $f(x) = ax^2 - 6x + a - 8$ on kaksi nollakohtaa?

264. Millä vakion a arvoilla funktio $f(x) = \dfrac{3}{ax^2 - ax + 3}$ on määritelty koko reaalilukujen joukossa?

265. Paraabelin $y = ax^2 + bx + c$ huippu voidaan määrittää toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla. Menetelmä perustuu seuraavaan havaintoon.

a) Osoita, että jos toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ diskriminantti $D \geq 0$, niin paraabeli $y = ax^2 + bx + c$ leikkaa x-akselin kohdissa $x_1 = -\dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{D}}{2a}$ ja $x_2 = -\dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{D}}{2a}$.

b) Päättele, mikä on paraabelin $y = ax^2 + bx + c$ huipun x-koordinaatti.

c) Etsi paraabelien $y = 4x^2 + 124x + 961$ ja $y = x^2 - 23x + 123$ huiput. Tarkista piirtämällä paraabelit laskimella.

Kurssissa 6 osoitetaan, että menetelmä toimii myös silloin, kun $D < 0$.

4 Korkeamman asteen polynomifunktio

Tässä luvussa ratkaistaan korkeamman asteen polynomiyhtälöitä ja epäyhtälöitä tulon nollasäännön ja merkkikaavion avulla. Samalla opitaan, kuinka polynomin nollakohdat ja tekijät liittyvät yhteen. Harjoitustehtävissä kerrataan muun muassa rekursiivista lukujonoa.

4.1 Tekijöihin jakaminen

Tekijöihin jakaminen tarkoittaa sitä, että korkeamman asteen polynomi ilmaistaan alemman asteen polynomien tulona: esimerkiksi

$$x^3 - x = x(x+1)(x-1).$$

Polynomin tekijöihin jakamista tarvitaan ratkaistaessa korkeamman asteen yhtälöitä ja epäyhtälöitä.

Tällä kurssilla polynomeja jaetaan tekijöihin

- käyttämällä muistikaavoja käänteiseen suuntaan
- erottamalla yhteinen tekijä
- ryhmittelemällä
- nollakohtien avulla.

Kurssilla 12 opitaan, että polynomin tekijöitä voidaan määrittää jakamalla polynomi jakokulmassa. Esimerkiksi polynomin $x^3 - x$ eräs nollakohta on 1, joten polynomi $x^3 - x$ voidaan jakaa binomilla $x - 1$.

Polynomia ei voida jakaa tekijöihin, jos sillä ei ole yhtään nollakohtaa. Tämä perustellaan luvussa 4.4.

Muistikaavat

Jotkin polynomit voidaan jakaa tekijöihin muistikaavojen avulla.

- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

ESIMERKKI 1

Jaa tekijöihin.

a) $4x^2 - 12x + 9$ **b)** $x^4 - 1$

RATKAISU

a)

$4x^2 - 12x + 9$	Tunnistetaan muistikaava.
$= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3) + (-3)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$, missä $a = 2x$ ja $b = -3$
$= (2x - 3)^2$	$(a + b)^2$

b)

$x^4 - 1$	Tunnistetaan muistikaava.
$= (x^2)^2 - 1^2$	$a^2 - b^2$, missä $a = x^2$ ja $b = 1$
$= (x^2 + 1)(x^2 - 1)$	$(a + b)(a - b)$
$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$	

Binomia $x^2 + 1$ ei voida jakaa tekijöihin, koska sillä ei ole yhtään nollakohtaa.

VASTAUS

a) $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$

b) $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

Yhteisen tekijän erottaminen

Monomin ja polynomin kertolasku perustuu osittelulakiin:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Menetelmää, jossa tämä päättely tehdään käänteiseen suuntaan, sanotaan *yhteisen tekijän erottamiseksi*:

$$ab + ac = a(b + c).$$

ESIMERKKI 2

Jaa tekijöihin.

a) $7x^5 + 14x^3$ **b)** $x^3 - 9x$

RATKAISU

a)
$7x^5 + 14x^3$ — Tunnistetaan yhteinen tekijä $7x^3$.

$= 7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 2$ — Erotetaan yhteinen tekijä.

$= 7x^3(x^2 + 2)$ — Binomia $x^2 + 2$ ei voida jakaa tekijöihin, koska sillä ei ole yhtään nollakohtaa.

b)
$x^3 - 9x$ — Erotetaan yhteinen tekijä x.

$= x(x^2 - 9)$

$= x(x^2 - 3^2)$ — $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$= x(x + 3)(x - 3)$

VASTAUS

a) $7x^5 + 14x^3 = 7x^3(x^2 + 2)$

b) $x^3 - 9x = x(x + 3)(x - 3)$

Tällä kurssilla tekijöihin jakaminen tehdään enimmäkseen ilman laskinta, mutta laajempien analysointia vaativien tehtävien rutiiniosia voidaan laskea myös laskimella.

Tekijöihin jakaminen laskimella

Polynomin jakaminen tekijöihin tapahtuu yleensä factor-komennolla. Esimerkiksi `factor(x^2 - x) = x(x - 1)`.

Selvitä, kuinka polynomi jaetaan tekijöihin laskimellasi. Jaa esimerkin 2 polynomit tekijöihin ja varmista, että saat oikeat tulokset.

Ryhmittely

Polynomien kertolasku perustuu osittelulakiin:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Menetelmää, jossa tämä päättely tehdään käänteiseen suuntaan, sanotaan *ryhmittelyksi*. Menetelmään sisältyy kaksi vaihetta:

$ac + ad + bc + bd$	Erotetaan kahden ensimmäisen termin yhteinen tekijä ja kahden viimeisen termin yhteinen tekijä.
$= a(c + d) + b(c + d)$	Erotetaan uudestaan yhteinen tekijä.
$= (a + b)(c + d).$	

ESIMERKKI 3

Jaa tekijöihin.

a) $6x^3 - 6x^2 + x - 1$ **b)** $2x^2 + 7x - 4$

RATKAISU

a)

$6x^3 - 6x^2 + x - 1$	Erotetaan kahden ensimmäisen termin yhteinen tekijä ja kahden viimeisen termin yhteinen tekijä.
$= 6x^2(x - 1) + 1(x - 1)$	Erotetaan yhteinen tekijä $x - 1$.
$= (6x^2 + 1)(x - 1)$	

b) Jos polynomissa on vain kolme termiä, niin siihen ei voi suoraan soveltaa ryhmittelyä. Joissain tapauksissa yksi termeistä voidaan kuitenkin jakaa kahteen osaan sopivasti, jolloin polynomi saadaan jaettua tekijöihin ryhmittelemällä.

$2x^2 + 7x - 4$	Hajotetaan keskimmäinen termi summaksi: $7x = -x + 8x$.
$= 2x^2 - x + 8x - 4$	Erotetaan kahden ensimmäisen termin yhteinen tekijä ja kahden viimeisen termin yhteinen tekijä.
$= x(2x - 1) + 4(2x - 1)$	Erotetaan yhteinen tekijä $2x - 1$.
$= (x + 4)(2x - 1)$	

VASTAUS

a) $6x^3 - 6x^2 + x - 1 = (6x^2 + 1)(x - 1)$

b) $2x^2 + 7x - 4 = (x + 4)(2x - 1)$

Harjoitustehtäviä

Sarja I

266. Jaa tekijöihin muistikaavojen avulla.

E1

a) $x^2 + 8x + 16$

b) $25 + 10y + y^2$

c) $4z^2 + 4z + 1$

267. Jaa tekijöihin.

a) $x^2 - 12x + 36$

b) $4x^2 - 20x + 25$

c) $x^4 - 2x^2 + 1$

268. Jaa tekijöihin.

a) $z^2 - 9$

b) $x^4 - 81$

c) $1 - y^4$

269. Jaa tekijöihin erottamalla yhteinen tekijä.

E2

a) $x^3 - 25x^2$

b) $32x^5 + 8x^4$

c) $z^{10} + z^9$

270. Jaa tekijöihin.

a) $x^3 - 16x$

b) $16x^3 - x$

c) $x^5 - x$

271. Jaa tekijöihin.

a) $y^3 + 2y^2 + y$

b) $y^3 - 4y^2 + 4y$

c) $9y^3 + 6y^2 + y$

272. Jaa tekijöihin erottamalla yhteinen tekijä.

a) $x(7x + 2) - 5(7x + 2)$

b) $y(y^2 - 1) + (y^2 - 1)$

c) $z(2 + z) - (2 + z)$

273. Jaa tekijöihin ryhmittelemällä.

E3

a) $x^3 - 5x^2 + 3x - 15$

b) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$

c) $5x^3 + x^2 - 5x - 1$

274. Jaa tekijöihin.

a) $x^4 - 7x^3 - 9x^2 + 63x$

b) $x^7 - x^5 + x^2 - 1$

c) $-3x^3 + 4x^2 + 3x - 4$

275. Jaa tekijöihin.

a) $x^2 - 6x - 7$

b) $y^2 + 7y + 10$

c) $2z^2 - 8z + 6$

Sarja II

276. Jaa tekijöihin.

a) $36x^2 + 60x + 25$

b) $9x^2 + 3x + \frac{1}{4}$

c) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

277. Jaa tekijöihin.

a) $z^2 - 81$

b) $9t^2 - s^2$

c) $16 - x^4$

278. Jaa osoittaja ja nimittäjä tekijöihin ja supista murtolauseke.

a) $\frac{x^2 - 9}{2x - 6}$

b) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x}$

c) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$

279. Supista murtolauseke.

a) $\dfrac{x^3 - x}{x + 1}$

b) $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

c) $\dfrac{x^3 + 10x^2 + 25x}{2x + 10}$

280. Jaa polynomi tekijöihin tunnistamalla binomin kuutio.

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

c) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

281. Jaa tekijöihin.

a) $3x^3 + x^2 + 12x + 4$

b) $2x^4 + x^3 - 10x - 5$

c) $7x^5 - 35x^3 + x^2 - 5$

282. Jaa tekijöihin.

a) $6x^2 - x - 1$

b) $y^2 - 10y + 21$

c) $3z^2 + 13z + 4$

283. Jaa ensimmäisen asteen tekijöihin.

a) $(x + 1)(x^2 + 2x) - (x + 1)(x + 6)$

b) $3x(3x^2 - 2x - 1) - 3x^2 + 2x + 1$

284. Jaa polynomi $x^4 - 10x^2 + 9$ tekijöihin.

285. Supista murtolauseke $\dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 4}$.

286. Kumpi luvuista $a^2 + \frac{1}{2}b^2$ ja ab on suurempi, kun $a \neq 0$, $b \neq 0$. Ratkaise tutkimalla lukujen erotusta. Esimerkit eivät kelpaa perusteluksi.

4.2 Korkeamman asteen yhtälö

TUTKIMUS

1) Lukujen x ja y tulo on nolla eli $xy = 0$. Mitä voit päätellä tulon tekijöistä x ja y?

2) Lukujen x ja $x - 9$ tulo on nolla eli $x(x - 9) = 0$. Mitä voit päätellä tulon tekijöistä x ja $x - 9$?

3) Jaa yhtälön $3x^2 + 15x = 0$ vasen puoli tekijöihin. Mitä voit päätellä tulon tekijöistä? Entä mitä voit päätellä luvusta x?

Tässä luvussa ratkaistaan yhtälöitä, joiden vasemmalla puolella on polynomien tulo ja oikealla nolla: esimerkiksi $(x^3 + 8)(2x - 1) = 0$.

Ratkaisumenetelmä perustuu seuraavaan lauseeseen.

Tulon nollasääntö — **Lause**

Tulo on nolla, jos ja vain jos jokin tulon tekijöistä on nolla.

Mitä tarkoittaa ”jos ja vain jos”?

Tulon nollasääntö sisältää kaksi väitelausetta:

1) Jos tulo on nolla, niin jokin tulon tekijöistä on nolla.

2) Jos jokin tulon tekijöistä on nolla, niin tulo on nolla.

Tulon nollasäännön mukaan päättely voidaan siis tehdä molempiin suuntiin. Joskus tätä havainnollistetaan symbolilla $\Leftrightarrow$ (ekvivalenssinuoli):

Tulo on nolla. $\Leftrightarrow$ Jokin tulon tekijöistä on nolla.

ESIMERKKI 1

Ratkaise yhtälö.

a) $-12x^2 + 4x = 0$ **b)** $x^5 = 81x^3$

RATKAISU

a)

$-12x^2 + 4x = 0$ Erotetaan yhteinen tekijä x.

$x(-12x + 4) = 0$ Käytetään tulon nollasääntöä.

$x = 0$ tai $-12x + 4 = 0$ Ratkaistaan x.

$x = \frac{1}{3}$

b)

$x^5 = 81x^3$ Siirretään termit samalle puolelle.

$x^5 - 81x^3 = 0$ Erotetaan yhteinen tekijä x^3.

$x^3(x^2 - 81) = 0$ Käytetään tulon nollasääntöä.

$x^3 = 0$ tai $x^2 - 81 = 0$ Ratkaistaan x.

$x = 0$ tai $x^2 = 81$

$x = 9$ tai $x = -9$

VASTAUS

a) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{3}$ **b)** $x = -9$, $x = 0$ tai $x = 9$

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$.

RATKAISU

$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ Erotetaan yhteinen tekijä x.

$x(x^2 - 2x - 3) = 0$ Käytetään tulon nollasääntöä.

$x = 0$ tai $x^2 - 2x - 3 = 0$ Ratkaistaan x.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$x = 3$ tai $x = -1$

VASTAUS

$x = -1$, $x = 0$ tai $x = 3$

ESIMERKKI 3

Ratkaise yhtälö $2x^4 - x^3 = 8 - 16x$.

RATKAISU

$$2x^4 - x^3 = 8 - 16x$$

Siirretään termit samalle puolelle.

$$2x^4 - x^3 + 16x - 8 = 0$$

Ryhmitellään ja erotetaan yhteiset tekijät.

$$x^3(2x - 1) + 8(2x - 1) = 0$$

$$(x^3 + 8)(2x - 1) = 0$$

$$x^3 + 8 = 0 \quad \text{tai} \quad 2x - 1 = 0$$

$$x^3 = -8 \quad \text{tai} \quad 2x = 1$$

$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{2}$$

VASTAUS

$x = -2$ tai $x = \frac{1}{2}$

Kirjapainotaidon ansiosta uudet matemaattiset keksinnöt alkoivat levitä renessanssiajan Euroopassa. Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisukaavat keksittiin 1500-luvulla.

Seuraavaksi ryhdyttiin etsimään ratkaisukaavaa viidennen asteen yhtälölle, mutta turhaan. 1800-luvun alussa norjalainen Abel ja ranskalainen Galois osoittivat, että viidennen ja sitä korkeamman asteen yhtälöillä ei ole yleistä ratkaisukaavaa.

Abelin ja Galois'n kohtalot kuvaavat aikaansa: Abel kuoli 26-vuotiaana keuhkotautiin ja Galois kuoli 20-vuotiaana kaksintaistelussa.

Niels Henrik Abel

Évariste Galois

Harjoitustehtäviä

Sarja I

287. a) Ratkaise tulon nollasäännön avulla yhtälö $(2x + 1)(x - 3) = 0$.
b) Tarkista piirtämällä laskimella funktion $f(x) = (2x + 1)(x - 3)$ kuvaaja.

288. Ratkaise yhtälö.
E1
a) $-x^2 + 14x = 0$
b) $7x^2 + 56x = 0$
c) $x = 9x^2$

289. Ratkaise yhtälö.
a) $x^3 - 49x = 0$
b) $x^3 + 4x = 0$
c) $x^3 - x = 0$

290. Ratkaise yhtälö.
a) $(x + 1)(7x + 1) = 0$
b) $(x + 1)(7x + 1) = 1$

291. Ratkaise yhtälö.
E2
a) $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$
b) $x^3 - 2x^2 - 24x = 0$

292. Ratkaise yhtälö.
a) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$
b) $16x^3 = 8x^2 - x$

293. Ratkaise yhtälö.
E3
a) $x^4 - 7x^3 - x + 7 = 0$
b) $x^5 + x^3 - x^2 - 1 = 0$

294. Ratkaise yhtälö.
a) $4x^2 + 4 = 3x^3 + 3x$
b) $x^7 - x^5 = 1 - x^2$

295. Määritä luvut, joilla on seuraava ominaisuus:
a) Luvun viides potenssi on yhtä suuri kuin luvun kolmas potenssi.
b) Luvun kuution ja neliön keskiarvo on yhtä suuri kuin luku itse.

296. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $5x^3 + ax^2 - 30x = 0$ on kolme juurta?

Sarja II

297. a) Ratkaise tulon nollasäännön avulla yhtälö $x(x - 1)^2(3x + 1) = 0$.
b) Tarkista piirtämällä laskimella funktion $f(x) = x(x - 1)^2(3x + 1)$ kuvaaja.

298. Ratkaise yhtälö.
a) $-14x^2 - 8x = 0$
b) $6x^2 = x$
c) $x^3 - 16x = 0$
d) $36x^6 = x^4$

299. Ratkaise yhtälö.
a) $x^3 + 3x^2 - 28x = 0$
b) $4x^3 - x^2 = 5x$

300. Ratkaise yhtälö.
a) $5x^3 - 3x = 18 - 30x^2$
b) $x^9 - 3x^5 + x^4 - 3 = 0$

301. Ratkaise yhtälö $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$ seuraavan ohjeen mukaisesti:
1) Muuta yhtälö toisen asteen yhtälöksi tekemällä sijoitus $x^2 = t$.
2) Ratkaise toisen asteen yhtälöstä muuttuja t.
3) Ratkaise lopuksi muuttuja x yhtälöstä $x^2 = t$.

302. Ratkaise yhtälöt.

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

b) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

c) $x^4 + 6x^2 + 16 = 0$

303. Määritä luvut, joilla on seuraava ominaisuus:

a) Luvun neljäs potenssi on yhtä suuri kuin kolme kertaa luvun neliö.

b) Luvun viides potenssi on yhtä suuri kuin luvun kuution ja itse luvun keskiarvo.

304. Määritä kolme peräkkäistä positiivista kokonaislukua, joiden tulo on yhtä suuri kuin niiden summa.

305. **a)** Luvut x, $x^2 + 1$ ja x^3 ovat erään aritmeettisen jonon peräkkäisiä jäseniä. Määritä x.

b) Luvut x, $x^2 + 1$ ja $x^3 + 3$ ovat erään geometrisen jonon peräkkäisiä jäseniä. Määritä x.

306. Lukujono on määritelty rekursiivisesti: $a_1 = 6$ ja $a_n = qa_{n-1} - 3$, kun $n \geq 2$. Määritä kerroin q siten, että jonon neljäs jäsen $a_4 = -3$. Mikä on tällöin jonon viides jäsen?

307. Lukujono on määritelty rekursiivisesti: $a_1 = -12{,}6$ ja $a_n = q^2a_{n-1} + 5{,}2$, kun $n \geq 2$.
Määritä kerroin q siten, että jonon neljäs jäsen $a_4 = 5{,}2$.

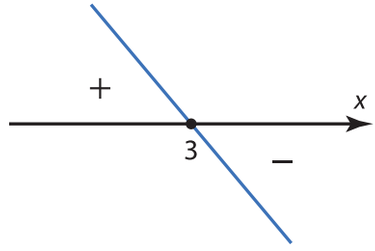
308. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $36x^3 + ax^2 + 16x = 0$ on tasan kaksi juurta? Mitkä nämä juuret ovat?

4.3 Korkeamman asteen epäyhtälö

Ensimmäisen asteen epäyhtälön ratkaisumenetelmä opittiin kurssissa 1.

$$\begin{aligned} -2x + 6 &> 0 \\ -2x &> -6 \qquad \mid : (-2) \\ x &< 3 \end{aligned}$$

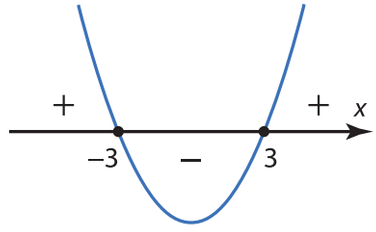
Ratkaisu nähdään myös kuvaajasta: Funktion $f(x) = -2x + 6$ kuvaaja on laskeva suora, jonka nollakohta on $x = 3$. Funktion f arvo on positiivinen, kun $x < 3$.



Toisen asteen epäyhtälön ratkaisumenetelmä opittiin luvussa 3.3. Menetelmä perustuu polynomifunktion merkin tutkimiseen kuvaajan avulla.

Funktion $f(x) = x^2 - 9$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat $x = -3$ tai $x = 3$.

Epäyhtälö $x^2 - 9 \le 0$ toteutuu, kun $-3 \le x \le 3$.



Kolmannen ja korkeamman asteen epäyhtälöt ratkaistaan tutkimalla polynomifunktion merkkiä merkkikaavion avulla. Epäyhtälöille

$$x^3 - 2x^2 - 3x < 0 \quad \text{ja} \quad 3x^3 - 2x^2 - 15x + 10 \ge 0$$

on yhteistä se, että epäyhtälön vasemmalla puolella on polynomi, joka voidaan jakaa tekijöihin, ja oikealla puolella on nolla. Tällainen epäyhtälö ratkaistaan seuraavasti:

1. Jaetaan polynomi tekijöihin.
2. Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat. Nollakohdat jakavat lukusuoran väleihin. Selvitetään tekijöiden merkit kullakin välillä.
3. Laaditaan polynomifunktion merkkikaavio.
4. Merkkikaaviosta katsotaan välit, joilla epäyhtälö toteutuu.

ESIMERKKI 1

Ratkaise epäyhtälö $x^3 - 2x^2 - 3x < 0$.

RATKAISU

Jaetaan polynomi $x^3 - 2x^2 - 3x$ tekijöihin.

$x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3)$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x:

Nollakohta on $x = 0$. Tekijän x arvo on negatiivinen, kun $x < 0$, ja positiivinen, kun $x > 0$.

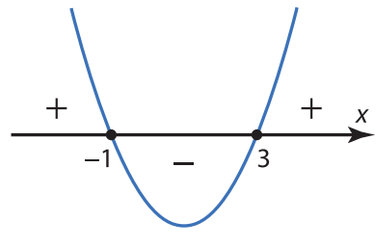
Tekijä $x^2 - 2x - 3$:

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$x = 3$ tai $x = -1$

Tekijän $x^2 - 2x - 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Tekijän $x^2 - 2x - 3$ arvo on negatiivinen, kun $-1 < x < 3$, ja positiivinen, kun $x < -1$ tai $x > 3$.



Tehtävä voidaan ratkaista myös toisella tavalla: Jaetaan tekijä $x^2 - 2x - 3$ ensimmäisen asteen tekijöihin.

$x^2 - 2x - 3$
$= x^2 + x - 3x - 3$
$= x(x + 1) - 3(x + 1)$
$= (x - 3)(x + 1)$

Ratkaistaan tekijöiden

x, $x - 3$ ja $x + 1$

nollakohdat, päätellään merkit ja laaditaan merkkikaavio.

Laaditaan polynomifunktion $x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3)$ merkkikaavio.

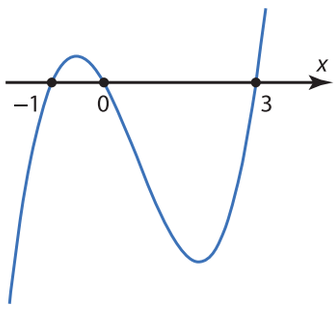
x	−		−	+	+
$x^2 - 2x - 3$	+		−	−	+
$x(x^2 - 2x - 3)$	−		+	−	+

−1 0 3 x

Epäyhtälö $x^3 - 2x^2 - 3x < 0$ toteutuu, kun $x < -1$ tai $0 < x < 3$.

Graafinen tarkistus

Ratkaisu voidaan tarkistaa piirtämällä funktion $x^3 - 2x^2 - 3x$ kuvaaja.



VASTAUS

$x < -1$ tai $0 < x < 3$

ESIMERKKI 2

Ratkaise epäyhtälö $3x^3 - 2x^2 \geq 15x - 10$.

RATKAISU

Siirretään termit epäyhtälön vasemmalle puolelle ja jaetaan vasen puoli tekijöihin.

$$3x^3 - 2x^2 \geq 15x - 10$$

$3x^3 - 2x^2 - 15x + 10 \geq 0$ Ryhmitellään.

$x^2(3x - 2) - 5(3x - 2) \geq 0$ Erotetaan yhteinen tekijä $3x - 2$.

$(x^2 - 5)(3x - 2) \geq 0$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään tekijöiden merkit.

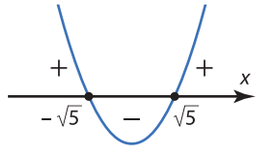
Tekijä $x^2 - 5$:

$x^2 - 5 = 0$

$x^2 = 5$

$x = \sqrt{5}$ tai $x = -\sqrt{5}$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



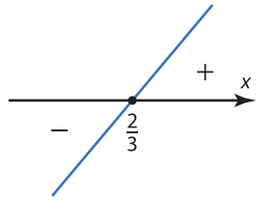
Tekijä $3x - 2$:

$3x - 2 = 0$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

Kuvaaja on nouseva suora.



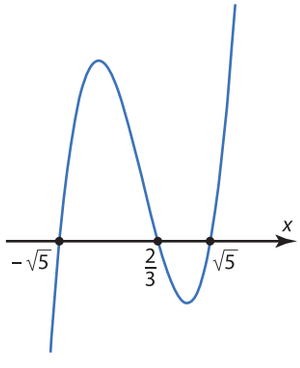
Laaditaan polynomifunktion $(x^2-5)(3x-2)$ merkkikaavio.

	$-\sqrt{5}$		$\frac{2}{3}$		$\sqrt{5}$	
$x^2 - 5$	+		–		–	+
$3x - 2$	–		–		+	+ x
$(x^2-5)(3x-2)$	–		+		–	+

Epäyhtälö $(x^2-5)(3x-2) \geq 0$ toteutuu, kun $-\sqrt{5} \leq x \leq \frac{2}{3}$ tai $x \geq \sqrt{5}$.

Graafinen tarkistus

Ratkaisu voidaan tarkistaa piirtämällä funktion $3x^3 - 2x^2 - 15x + 10$ kuvaaja.



VASTAUS

$-\sqrt{5} \leq x \leq \frac{2}{3}$ tai $x \geq \sqrt{5}$

ESIMERKKI 3

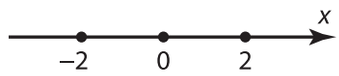
Ratkaise epäyhtälö $x^5 - 16x \le 0$.

RATKAISU

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Ratkaistaan funktion $f(x) = x^5 - 16x$ nollakohdat.

$$x^5 - 16x = 0$$
$$x(x^4 - 16) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x^4 - 16 = 0$$
$$x^4 = 16$$
$$x = \sqrt[4]{16} = 2 \text{ tai } x = -\sqrt[4]{16} = -2$$

Funktio f voi vaihtaa merkkiään vain kohdissa -2, 0 ja 2.



Huomaa!
Koska polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan, kaikki ensimmäisen, toisen ja korkeamman asteen epäyhtälöt voidaan ratkaista esimerkin 3 menetelmällä. Päässälaskuja varten kannattaa kultakin osaväliltä valita mahdollisimman helppo luku.

Nollakohdat jakavat lukusuoran neljään väliin. Lasketaan kultakin väliltä yksi funktion f arvo.

$f(-10) = (-10)^5 - 16 \cdot (-10)$
$= -100\,000 + 160 = -99\,840 < 0$

Välillä $]-\infty, -2[$ merkki on miinus.

$f(-1) = (-1)^5 - 16 \cdot (-1)$
$= -1 + 16 = 15 > 0$

Välillä $]-2, 0[$ merkki on plus.

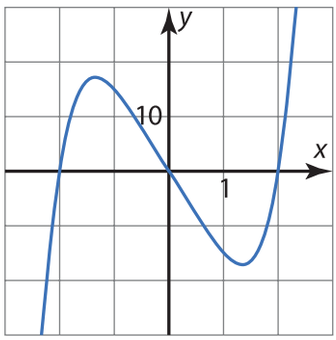
$f(1) = 1^5 - 16 \cdot 1$
$= 1 - 16 = -15 < 0$

Välillä $]0, 2[$ merkki on miinus.

$f(10) = 10^5 - 16 \cdot 10$
$= 100\,000 - 160 = 99\,840 > 0$

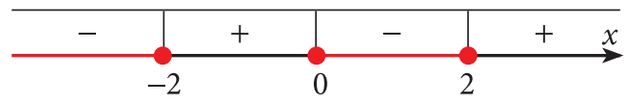
Välillä $]2, \infty[$ merkki on plus.

Graafinen tarkistus
Funktion $f(x) = x^5 - 16x$ kuvaaja.



Kirjataan merkit merkkikaavioon.

$f(x) = x^5 - 16x$



Epäyhtälö $x^5 - 16x \le 0$ toteutuu, kun $x \le -2$ tai $0 \le x \le 2$.

VASTAUS

$x \le -2$ tai $0 \le x \le 2$

Harjoitustehtäviä

Sarja I

309. Piirrä funktion f kuvaaja. Millä muuttujan x arvoilla funktion f arvot ovat positiivisia?

a) $f(x) = x - 1$
b) $f(x) = x^2 - 1$
c) $f(x) = x^3 - 1$
d) $f(x) = x^4 - 1$

310. Piirrä funktion f kuvaaja. Millä muuttujan x arvoilla funktion f arvot ovat negatiivisia?

a) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$
b) $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$

311. Ratkaise epäyhtälö.

E1 a) $x^3 + x^2 - 6x > 0$
b) $x^3 - 5x^2 > 0$

312. Millä muuttujan x arvoilla funktion arvot ovat negatiivisia?

a) $x^3 + 7x^2 - 8x$
b) $-3x^4 + 12x^2$

313. Ratkaise epäyhtälö.

a) $8x^3 - 2x^2 > x$
b) $x^4 + 2x^3 \geq -x^2$

314. Ratkaise epäyhtälö.

E2 a) $-x^3 + 3x^2 + 4x - 12 > 0$
b) $2x^3 + 6x^2 < 2x + 6$

315. Ratkaise epäyhtälö.

a) $x^3 - 6x^2 \leq 3x - 18$
b) $5x^3 + 5x \geq 6x^2 + 6$

316. Ratkaise epäyhtälö.

E3 a) $x^4 + 8x < 0$
b) $x^5 - 3x^4 < 0$
c) $x^6 - 9x^4 > 0$

317. Määritä luvut, joilla on seuraava ominaisuus: luvun kuutio on suurempi kuin luku itse.

318. Määritä luvut, joilla on seuraava ominaisuus: luvun kuutio on pienempi kuin luvun neliö.

Sarja II

319. Piirrä funktion f kuvaaja. Millä muuttujan x arvoilla funktion f arvot ovat epänegatiivisia?

a) $f(x) = x^3 - 4x$
b) $f(x) = -x^4 + 4x^2$
c) $f(x) = x^6 - 4x^4$

320. Millä muuttujan x arvoilla funktion arvot ovat negatiivisia?

a) $2x^3 - 9x^2 - 11x$
b) $x^4 - 5x^3$

321. Ratkaise epäyhtälö.

a) $x^5 - 8x^2 \geq 0$
b) $2x^2 + 9x \geq x^3$

322. Ratkaise epäyhtälö.

a) $-x^3 + 7x^2 + 18x \leq 0$
b) $x^7 - 25x^5 > 0$

323. Ratkaise epäyhtälö.

a) $9x^3 - 45x^2 < x - 5$
b) $3x^4 - 18x^3 - 3x + 18 \geq 0$

324. Ratkaise

a) yhtälö $(x-10)(x^2-9)(x^3-8)=0$

b) epäyhtälö $(x-10)(x^2-9)(x^3-8)<0$.

325. Ratkaise

a) yhtälö $x^2(3x^2+x-2)=3x^2+x-2$

b) epäyhtälö $x^2(3x^2+x-2)>3x^2+x-2$.

326. Ratkaise epäyhtälö selvittämällä polynomin nollakohdat ja testaamalla polynomin merkki.

a) $x^4-3x^2-4>0$

b) $3x^4-5x^2-2\le 0$

c) $x^6-2x^4-3x^2<0$

327. Toteuttavatko epäyhtälön $4x^2-1<0$ ratkaisut myös epäyhtälön $4x^3-x<0$?

328. Lukujono on määritelty rekursiivisesti: $a_1=-2$ ja $a_n=k^2a_{n-1}+1$, kun $n\ge 2$. Määritä kerroin k siten, että jonon kolmas jäsen a_3 on positiivinen.

329. Lukujono on määritelty rekursiivisesti: $a_1=a_2=k$ ja $a_n=\dfrac{a_{n-1}^3+a_{n-2}^2}{2}$, kun $n\ge 3$.
Määritä vakio k siten, että $a_3>k^4$.

330. Olkoon $f(x)=x^3+ax^2+(a^2+1)x$. Osoita, että olipa vakiolla a mikä arvo tahansa, niin $f(x)<0$, kun $x<0$, ja $f(x)>0$, kun $x>0$.

4.4 Nollakohtien ja tekijöiden yhteys

Tekijöihin jakaminen nollakohtien avulla

Tulon nollasääntöä soveltamalla voidaan muodostaa toisen asteen yhtälö, joilla on halutut juuret. Esimerkiksi yhtälö, jonka juuriksi halutaan luvut -3 ja 4, voidaan muodostaa seuraavasti.

$x = -3$ tai $x = 4$

Käytetään tulon nollasääntöä käänteiseen suuntaan.

$x + 3 = 0$ tai $x - 4 = 0$

$(x + 3)(x - 4) = 0$

$x^2 - 4x + 3x - 12 = 0$

$x^2 - x - 12 = 0$

Yhtälön juuret eivät muutu, kun yhtälö kerrotaan nollasta eroavalla luvulla. Toisen asteen yhtälöt, joiden juuret ovat -3 ja 4, voidaan siis esittää muodossa

$$a(x + 3)(x - 4) = 0,$$

missä $a \neq 0$.

Näyttää siltä, että jos tunnetaan toisen asteen polynomin nollakohdat, niin polynomi voidaan ilmaista tekijöidensä tulona. Esimerkki ei yksinään todista päätelmää oikeaksi, vaan se täytyy vielä perustella täsmällisemmin.

Toisen asteen polynomin nollakohtien ja tekijöiden yhteys **Lause**

1) Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on kaksi juurta x_1 ja x_2, niin polynomin $ax^2 + bx + c$ ensimmäisen asteen tekijät ovat $x - x_1$ ja $x - x_2$ siten, että

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

2) Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ ei ole yhtään juurta, niin polynomilla $ax^2 + bx + c$ ei ole yhtään ensimmäisen asteen tekijää. Tällöin sanotaan, että polynomi on *jaoton*.

Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on ainoastaan yksi juuri x_1, niin sitä kutsutaan *kaksoisjuureksi*.
Tällöin $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$.

TODISTUS

Tapaus 1: Kaksi juurta tai yksi juuri

Yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on kaksi juurta, jos yhtälön diskriminantti $D = b^2 - 4ac$ on positiivinen. Juuret ovat

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on yksi (kaksois)juuri, jos yhtälön diskriminantti $D = 0$. Tällöin

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b}{2a} \quad \text{eli} \quad x_1 = x_2.$$

Osoitetaan, että kummassakin tapauksessa
$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c$.

1. Ryhdytään laskemaan tuloa $a(x - x_1)(x - x_2)$.

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2) \\ &= a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2) \end{aligned}$$

2. Lasketaan juurten summa $x_1 + x_2$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D} - b + \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{-b - b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

3. Lasketaan juurten tulo x_1x_2.

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{D})(-b + \sqrt{D})}{2a \cdot 2a} \\ &= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

4. Sijoitetaan juurten summa $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ja tulo $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ polynomiin $a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2)$.

$$\begin{aligned} a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2) &= a(x^2 - x(-\frac{b}{a}) + \frac{c}{a}) \\ &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

5. Siis on osoitettu, että $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c$.

Huomaa!
Todistuksessa saadaan tietoa toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juurten x_1 ja x_2 summasta ja tulosta:

- summa $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- tulo $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Summan ja tulon kaavat pätevät myös silloin, kun yhtälöllä on vain yksi juuri.

Tällöin

$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

ja yhtälö voidaan saattaa muotoon $a(x - x_1)^2 = 0$.

Tapaus 2: Ei yhtään juurta

Oletetaan, että yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ ei ole yhtään juurta.

Jos polynomilla $ax^2 + bx + c$ olisi ensimmäisen asteen tekijä $sx + t$, missä $s \neq 0$, niin olisi olemassa jokin ensimmäisen asteen polynomi $P(x)$ niin, että $ax^2 + bx + c = P(x)(sx + t)$.

Mutta tulon nollasäännöstä seuraa, että tällöin $x = -\frac{t}{s}$ olisi yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juuri. Koska tämä on ristiriita, niin polynomilla $ax^2 + bx + c$ ei ole ensimmäisen asteen tekijää. □

Polynomin nollakohtien ja tekijöiden yhteys **Lause**

Luku x_0 on polynomin $P(x)$ nollakohta, jos ja vain jos $x - x_0$ on polynomin $P(x)$ tekijä.

Esimerkiksi jakolaskun $13 : 5$ *osamäärä* on 2 ja *jakojäännös* 3.

Jakolaskun tulos voidaan ilmaista *jakoyhtälön* avulla:
$13 = 2 \cdot 5 + 3$.

Lausetta voidaan perustella seuraavasti: Oletetaan, että polynomien jakolaskun $P(x) : (x - x_0)$ osamäärä on polynomi $Q(x)$ ja jakojäännös reaaliluku r. Tällöin $P(x) = Q(x)(x - x_0) + r$.

Jakojäännös r voidaan laskea sijoittamalla yhtälöön $x = x_0$.

$$P(x_0) = Q(x_0)(x_0 - x_0) + r = Q(x_0) \cdot 0 + r = r$$

Siis jakojäännös $r = P(x_0)$. Toisaalta $x - x_0$ on polynomin $P(x)$ tekijä eli jakolasku $P(x) : (x - x_0)$ menee tasan täsmälleen silloin, kun jakojäännös $r = 0$ eli $P(x_0) = 0$.

Lause todistetaan täsmällisemmin kurssilla 12. Lauseesta seuraa tulos:

Polynomiyhtälön juurten lukumäärä **Lause**

Jos polynomiyhtälön asteluku on n, niin yhtälöllä on enintään n juurta.

TODISTUS

Oletetaan, että n:nnen asteen polynomiyhtälöllä $P(x) = 0$ on k juurta $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Tällöin binomit $x - x_1, x - x_2, \ldots, x - x_k$ ovat polynomin $P(x)$ tekijöitä. Toisin sanoen

$$P(x) = Q(x)(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_k),$$

missä $Q(x)$ on jokin polynomi.

Tulo $(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_k)$ on polynomi, jonka asteluku on k. Koska polynomin $P(x)$ asteluku on n, niin polynomin $Q(x)$ asteluku on $n - k \geq 0$. Siten $k \leq n$. □

ESIMERKKI 1

Jaa tekijöihin polynomi $5x^2 + 4x - 1$.

RATKAISU

Ratkaistaan nollakohdat.

$$5x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1)}}{2 \cdot 5} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{10} = \frac{-4 \pm 6}{10}$$

$$x = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ tai } x = \frac{-10}{10} = -1$$

Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$5x^2 + 4x - 1$$

$$= 5(x - \frac{1}{5})(x - (-1))$$

$$= (5x - 1)(x + 1)$$

$a(x - x_1)(x - x_2)$,
jossa $a = 5$, $x_1 = \frac{1}{5}$ ja $x_2 = -1$.

Polynomi $5x^2 + 4x - 1$ voidaan jakaa tekijöihin myös ryhmittelymenetelmällä:

$5x^2 + 4x - 1$
$= 5x^2 + 5x - x - 1$
$= 5x(x + 1) - 1(x + 1)$
$= (5x - 1)(x + 1)$

VASTAUS

$5x^2 + 4x - 1 = (5x - 1)(x + 1)$

Polynomin muodostaminen nollakohtien avulla

ESIMERKKI 2

Muodosta kolmannen asteen polynomifunktio, jonka nollakohdat ovat -2, 0 ja 3 ja jonka arvo kohdassa 2 on 4. Piirrä funktion kuvaaja.

RATKAISU

Kolmannen asteen polynomilla voi olla enintään kolme nollakohtaa. Polynomin nollakohdat ovat $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ ja $x_3 = 3$, jos ja vain jos sen tekijät ovat

$x - x_1 = x - (-2) = x + 2,$

$x - x_2 = x - 0 = x,$

$x - x_3 = x - 3.$

Funktion lauseke on siis muotoa

$P(x) = a \cdot (x + 2) \cdot x \cdot (x - 3) = ax(x + 2)(x - 3)$, jossa $a \neq 0$.

Ratkaistaan kertoimen a arvo.

$P(2) = 4$ Funktion arvo kohdassa 2 on 4.

$a \cdot 2 \cdot (2 + 2)(2 - 3) = 4$

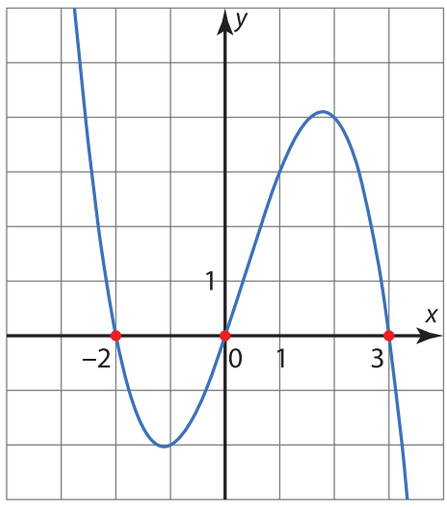
$a = -\frac{1}{2}$

Polynomin voi myös sieventää muotoon

$P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x.$

Siis $P(x) = -\frac{1}{2}x(x + 2)(x - 3)$.

Piirretään funktion kuvaaja laskimella.



VASTAUS

$P(x) = -\frac{1}{2}x(x + 2)(x - 3)$

ESIMERKKI 3

Määritä vakiolle b sellainen arvo, että murtolauseke $\dfrac{x^2+bx-45}{4x+12}$ voidaan supistaa. Supista murtolauseke. Millä muuttujan x arvoilla murtolauseke on määritelty?

RATKAISU

Murtolauseke voidaan supistaa vain, jos osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä.

Jaetaan nimittäjä tekijöihin.

$4x + 12 = 4(x + 3)$

Osoittajalla on tekijä $x + 3$, jos ja vain jos -3 on osoittajan nollakohta.

Ratkaistaan vakio b.

$(-3)^2 + b \cdot (-3) - 45 = 0$ Osoittajan arvo kohdassa -3 on 0.

$-3b - 36 = 0$

$b = -12$

Osoittajaksi saadaan $x^2 - 12x - 45$.

Jaetaan osoittaja tekijöihin.

$x^2 - 12x - 45 = (x + 3)(x - 15)$ Jaetaan tekijöihin nollakohtien avulla, ryhmittelemällä tai laskimella.

Supistetaan murtolauseke.

$$\frac{x^2 - 12x - 45}{4x - 12} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x + 3)}}(x - 15)}{4\underset{1}{\cancel{(x + 3)}}} = \frac{x - 15}{4}$$

Nimittäjän tekijä $x + 3$ saa arvon nolla, kun $x = -3$. Koska nollalla ei voi jakaa, murtolauseke on määritelty vain, kun $x \neq -3$.

VASTAUS

$b = -12$, $\dfrac{x-15}{4}$, kun $x \neq -3$

Harjoitustehtäviä

Sarja I

331. Jaa polynomi tekijöihin.

E1 **a)** $x^2 + x - 6$

b) $x^2 + x - 30$

c) $-3x^2 + 6x - 3$

332. **a)** Ratkaise yhtälö $25x^2 - 20x + 4 = 0$.

b) Ilmaise polynomi $25x^2 - 20x + 4$ tekijöidensä tulona.

333. E2 Muodosta toisen asteen polynomifunktio, jonka nollakohdat ovat -2 ja 3 ja jonka arvo kohdassa 0 on 12. Piirrä funktion kuvaaja.

334. Muodosta toisen asteen yhtälö, jonka toisen asteen termin kerroin on 3, ja jonka

a) juuret ovat -6 ja 1

b) ainoa juuri on -6.

335. ▶ Muodosta kolmannen asteen polynomifunktio, jonka kolmannen asteen termin kerroin on 8 ja jonka nollakohdat ovat -4, 0 ja 6.

336. Muodosta kolmannen asteen polynomifunktio, jonka nollakohdat ovat -3, 0 ja $\frac{1}{4}$ ja jonka arvo kohdassa -1 on 5. Piirrä funktion kuvaaja.

337. E3 Määritä vakiolle c sellainen arvo, että polynomilla $3x^2 + 12x + c$ on tekijänä $x - 2$. Mikä on tällöin polynomin toinen tekijä?

338. Määritä vakiolle b sellainen arvo, että polynomilla $x^2 + bx - 96$ on tekijänä $x + 12$. Mikä on tällöin polynomin toinen tekijä?

339. ▶ Määritä vakiolle c sellainen arvo, että murtolauseke $\frac{x^2 + 3x + c}{2x + 12}$ voidaan supistaa. Supista murtolauseke. Millä muuttujan x arvoilla murtolauseke on määritelty?

340. Määritä vakiolle b sellainen arvo, että murtolauseke $\frac{4x^2 + bx - 12}{6x - 3}$ voidaan supistaa. Supista murtolauseke. Millä muuttujan x arvoilla murtolauseke on määritelty?

Sarja II

341. Muodosta toisen asteen polynomifunktio, jonka nollakohdat ovat -2 ja -6 ja jonka arvo kohdassa 0 on 4.

342. Osoita, että luvut -3, $\frac{1}{3}$ ja $\frac{5}{2}$ ovat polynomin $P(x) = 12x^3 + 2x^2 - 92x + 30$ nollakohtia. Voiko polynomilla olla muita nollakohtia? Jaa polynomi tekijöihin.

343. **a)** Ratkaise yhtälö $28x^2 - 11x + 1 = 0$.

b) Ilmaise polynomi $28x^2 - 11x + 1$ tekijöidensä tulona.

344. Määritä vakiolle c sellainen arvo, että yhtälöllä $x^2 + 18x + c = 0$ on kaksoisjuuri. Mikä on tämä kaksoisjuuri?

345. Määritä vakiolle a sellainen arvo, että yhtälöllä $ax^2 - 60x + 25 = 0$ on kaksoisjuuri. Mikä on tämä kaksoisjuuri?

346. Määritä vakiolle k sellainen arvo, että polynomilla $x^2 + kx + k^2 - 7$ on tekijänä $x + 1$. Mitkä ovat tällöin polynomin muut tekijät?

347. Määritä vakiolle b sellainen arvo, että murtolauseke $\dfrac{x^2 + bx - 4}{x^2 - 16}$ voidaan supistaa. Supista murtolauseke. Millä muuttujan x arvoilla murtolauseke on määritelty?

348. Määritä vakiolle c sellainen arvo, että murtolauseke $\dfrac{x^4 - 18x^2 + 81}{x + c}$ voidaan supistaa. Supista murtolauseke. Millä muuttujan x arvoilla murtolauseke on määritelty?

349. **a)** Päättele yhtälöä ratkaisematta yhtälön $x^2 - 3x - 54 = 0$ juurten summa.

b) Päättele yhtälöä ratkaisematta yhtälön $4x^2 + 21x + 5 = 0$ juurten tulo.

c) Yhtälön $x^2 - 3x - 180 = 0$ juuriksi oli saatu luvut -15 ja 12. Kuinka näet heti, että ratkaisu on virheellinen?

d) Yhtälön $5x^2 + 2x - 7 = 0$ kertoimista näkee, että yhtälöllä on juuri $x = 1$. Määritä yhtälön toinen juuri.

e) Päättele d-kohdan keinolla yhtälön $9x^2 - 4x - 5 = 0$ juuret.

350. Oletetaan, että n on ykköstä suurempi kokonaisluku.

a) Osoita, että polynomi $x^n - 1$ on jaollinen binomilla $x - 1$.

b) Osoita, että luku $55^{99} - 1$ ei ole alkuluku.

351. Osoita, että luku $123^{45} + 1$ ei ole alkuluku.

Kertaus

1 POLYNOMIT

1.1 Polynomien summa ja erotus

K1. Muodosta ja sievennä polynomien
a) $2x^3 + x^2 - 3x + 2$ ja $x^3 - x - 2$ summa
b) $x^4 - 5x^3 + 2x$ ja $-5x^3 - x + 1$ erotus.

K2. Laske funktion
a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ arvo kohdassa $x = 3$
b) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - x$ arvo kohdassa $x = -1$.

K3. Sievennä.
a) $12 - (a - (a - (2a + 10)))$
b) $2(5x + x) + 3x - (x - 2)$

K4. Sievennä.
a) $[a - (-a - a)] - \{2a - [-a + (a - a)]\}$
b) $[(x - 2x) - (-x)] - \{x - [-(x + x) - x]\}$

K5. Ratkaise yhtälö.
a) $\frac{x-4}{2} = 2 - \frac{x-3}{3}$
b) $\frac{1}{2} - \frac{2x+6}{4} = x - \frac{1-x}{4}$

1.2 Polynomien tulo

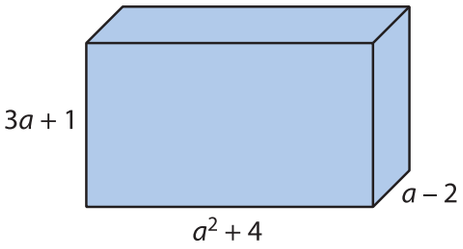
K6. Sievennä.
a) $2x^5 \cdot 3x^2$
b) $-x^2 \cdot 4x$
c) $-3x^6 \cdot (-4x^3)$
d) $4x^5 \cdot (-2x^3) \cdot x^2$

K7. Sievennä.
a) $-4x(x^2 - 2)$
b) $x^3(x^4 - 3x)$
c) $-4x^2(-x^2 + 5x)$
d) $x^5(x^4 - 4x^3)$

K8. Sievennä.
a) $(x + 1)(2x + 3)$
b) $(2x + 1)(x^2 - 3)$
c) $(x - 2)(-x^2 + 5x)$
d) $(x + 2)(x + 2)$

K9. Sievennä polynomi $P(x)$ ja laske sen arvo, kun $x = -1$.
a) $P(x) = 2x^3 \cdot 5x^2 \cdot (-4x)$
b) $P(x) = -x(-2x + 1) - (x + 1)(-4x + 5)$

K10. Laske suorakulmaisen särmiön kokonaispinta-ala, kun särmien pituudet ovat $a - 2$, $3a + 1$ ja $a^2 + 4$.



1.3 Binomin neliö ja kuutio

K11. Sievennä.
a) $(2x + 3)^2$ **b)** $(x - 5)^2$
c) $(-3x + 1)^2$ **d)** $(x^4 - 3)^2$

K12. Sievennä.
a) $(-x - 4)^2$
b) $(x^3 + x^2)^2$
c) $(-\frac{1}{2}x + 2)^2$
d) $(1 - \frac{1}{4}x)^2$

K13. Sievennä.
a) $(x - 2)^3$ **b)** $(-x - 3)^3$ **c)** $(2x + 1)^3$

K14. Määritä vakiolle a sellainen arvo, että polynomi voidaan kirjoittaa binomin neliönä, ja kirjoita binomin neliö.

a) $x^2 - 6x + a$

b) $x^2 + 10x + a$

c) $4x^2 - ax + 49$

d) $ax^2 + 24x + 36$

K15. Osoita, että

a) $(-a - b)^2 = (a + b)^2$

b) $(-a + b)^2 = (a - b)^2$.

1.4 Summan ja erotuksen tulo

K16. Sievennä.

a) $(x + 6)(x - 6)$

b) $(3x + 2)(3x - 2)$

c) $(2x + 5)(2x - 5)$

d) $(4x + 3)(4x - 3)$

K17. Sievennä.

a) $(2 + x)(2 - x)$

b) $(y + x)(x - y)$

c) $(5 - 2x)(5 + 2x)$

d) $(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2})(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2})$

K18. Sievennä.

a) $(2x - 1)(2 + 4x) - (x - 2)^2$

b) $2x^2(x - 3)^2 - (-x^2)(x^2 - 4x)(x^2 + 4x)$

K19. Supista murtolauseke.

a) $\frac{x^2 - 25}{2x - 10}$

b) $\frac{1 - 4x^2}{1 + 2x}$

c) $\frac{24x - 18}{16x^2 - 9}$

2 POTENSSIYHTÄLÖT

2.1 Neliöjuuri

K20. Merkitse ja määritä.

a) luvun 4 neliöjuuri

b) luvun 36 neliöjuuri

c) luvun 17 neliöjuuri

d) luvun -16 neliöjuuri

K21. Ratkaise yhtälö.

a) $x^2 = 64$

b) $2x^2 - 3 = 5$

c) $3x^2 - 15 = 0$

K22. Laske.

a) $\left(\sqrt{3}\right)^2$

b) $\left(-2\sqrt{6}\right)^2$

c) $3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4$

d) $2a - \sqrt{a^2}$, kun $a < 0$

2.2 Neliöjuuren laskusäännöt

K23. Sievennä.

a) $\sqrt{12} - \sqrt{2} - \sqrt{27}$

b) $4\sqrt{200} - 3\sqrt{32}$

c) $\sqrt{15}\left(\sqrt{10} - \sqrt{20}\right)$

d) $\sqrt{4 + 16} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{30} + 2\sqrt{45}$

K24. Sievennä.

a) $\left(2 + \sqrt{5}\right)\left(2 - \sqrt{5}\right)$

b) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$

K25. Sievennä.

a) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{\frac{25}{9}}$

c) $\sqrt{5\frac{5}{4}}$

d) $\sqrt{\sqrt{4} - \sqrt{\frac{9}{16}}}$

K26. Tutki, onko

a) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$.

2.3 Korkeammat juuret

K27. **a)** Määritä $\sqrt[7]{-2187}$. Mitkä luvut toteuttavat yhtälön $x^7 = -2187$?

b) Määritä $\sqrt[4]{6561}$. Mitkä luvut toteuttavat yhtälön $x^4 = 6561$?

K28. Ratkaise yhtälö.

a) $3x^4 = 48$

b) $2x^3 + 10 = -6$

c) $(2x-1)^6 = 64$

K29. Helsingin väkiluku ylitti 600 000 asukasta kesällä 2012. Kesällä 2015 Helsingissä oli asukkaita jo 627 000.

a) Jos vuotuinen asukasmäärän kasvu prosentuaalisesti pysyy samansuuruisena tulevaisuudessa kuin vuodesta 2012 vuoteen 2015, niin kuinka paljon Helsingissä asuu ihmisiä kesällä 2050? Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

b) Kuinka suuri vuotuisen kasvuprosentin pitäisi kesän 2015 jälkeen olla, jotta Helsingissä asuisi 900 000 ihmistä kesällä 2030? Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

K30. Kun sävelkorkeus nousee yhden oktaavin, sävelen taajuus kaksinkertaistuu. Tasavireisessä virityksessä oktaavi sisältää 12 puolisäveltä (c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, ais ja h), joiden taajuudet muodostavat geometrisen jonon. Keski-c-sävelen taajuus on 261,6 Hz (hertsiä). Laske seuraavaksi korkeamman g-sävelen taajuus.

3 TOISEN ASTEEN POLYNOMIFUNKTIO

3.1 Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja

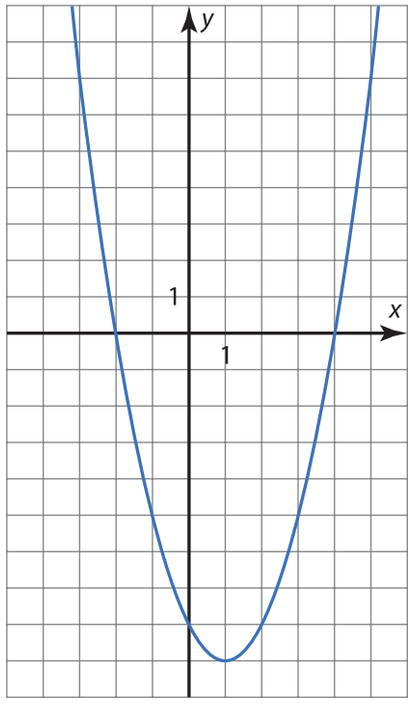
K31. Vieressä on erään toisen asteen polynomifunktion f kuvaaja $y = f(x)$. Määritä kuvaajan perusteella

a) funktion arvo kohdassa $x = 3$

b) kohdat, joissa funktion arvo on -8

c) funktion f nollakohdat

d) millä muuttujan x arvoilla funktio f saa negatiivisia arvoja.



K32. Piirrä laskimella funktioiden $f(x) = x^2 + 4x$ ja $g(x) = -x^2 + 2x$ kuvaajat. Määritä kuvaajien perusteella

a) millä muuttujan x arvoilla funktion f arvo on negatiivinen

b) millä muuttujan x arvoilla funktion g arvo on negatiivinen

c) yhtälön $x^2 + 4x = 0$ juuret

d) yhtälön $-x^2 + 2x = 0$ juuret.

K33. Jalkapallon lentorata noudattaa likimain paraabelia $y = x - \frac{10}{v^2} \cdot x^2$, kun pallo potkaistaan $45°$:n kulmassa, pallon lähtönopeus on v (m/s), lähtöpaikka on origossa ja koordinaatiston yksikkönä on metri. Mikä oli pallon lähtönopeus, kun pallo kävi 5,0 metrin korkeudessa ja lensi 21,0 metrin päähän?

3.2 Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

K34. Ratkaise yhtälö.

a) $2x^2 = 2x + 4$

b) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}x - 1 = 0$

K35. Ratkaise yhtälö.

a) $2x(x-4) + 3 = (x-3)^2 - 3x$

b) $2x^3 - 2x(x-3)(x+3) + 4x = 14 - (2x-4)^2$

K36. Millä muuttujan s arvoilla funktion $f(s) = -4s^2 + 3s + 1$ arvo on

a) 1 **b)** 0 **c)** 2?

K37. Millä vakion a arvolla $x = \sqrt{3}$ on yhtälön $x^2 + ax - 2a^2 = 0$ juuri. Määritä yhtälön toinen juuri.

3.3 Toisen asteen epäyhtälö

K38. Ratkaise epäyhtälö.

a) $2x^2 - x \le x + 4$ **b)** $-x^2 + 2x - 1 < 0$

c) $(x-1)(x+1) + x + 7 \ge 3 - (x-1)$

K39. Millä muuttujan x arvoilla funktio $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ on määritelty?

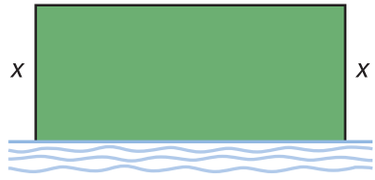
K40. Määritä ne positiiviset kokonaisluvut, jotka neliöstään vähennettynä antavat erotukseksi enintään 70.

3.4 Sovelluksia

K41. Joen rannassa sijaitsevan suorakulmion muotoisen tontin pinta-ala on $1040\ \text{m}^2$. Tontin ympäröimiseen kolmelta sivulta tarvitaan 106 m aitaa.

a) Jokea vasten kohtisuoran sivun pituutta merkitään kirjaimella x (m). Ilmaise lausekkeena joen suuntaisen sivun pituus ja tontin pinta-ala.

b) Muodosta pinta-alasta yhtälö ja määritä tontin mitat.



K42. Suorakulmion muotoinen metsätontti oli 100 metriä pitkä ja 70 metriä leveä. Tontin kahdelta erisuuntaiselta reunalta kaadettiin metsää yhtä leveältä alueelta niin, että metsän pinta-ala pieneni $2325\ \text{m}^2$. Laske hakkuualueen leveys.

K43. Kalastusalueen taimenkanta pienenee joka vuosi yhtä monta prosenttia. Vuoden 2014 toukokuussa taimenten lukumääräksi arvioitiin 3000. Vuoden 2015 toukokuussa kalastusalueelle istutettiin 1500 taimenta. Vuoden 2016 toukokuussa taimenten lukumäärä oli 3300. Kuinka monta prosenttia taimenkanta pienenee vuodessa?

3.5 Diskriminantti

K44. Kuinka monta juurta on yhtälöllä

a) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

b) $5x - 4 = x^2$

c) $(2x - 1)(1 + 2x) - 2x^2 - 8x + 11 = (x - 1)^2$?

K45. Millä vakion a arvoilla funktio saa vain positiivisia arvoja?

a) $f(x) = 2x^2 - 4ax + 2$

b) $g(x) = ax^2 + 2x - 4$

K46. Millä vakion t arvoilla yhtälöllä $tx^2 + 2tx + 2 = \frac{5}{4}tx^2 + tx + \frac{1}{2}$ on täsmälleen yksi juuri? Ratkaise tämä juuri.

K47. Millä vakion t arvoilla yhtälöllä $x(x + 1) + 7 = \frac{3}{4}x^2 - t(x + 1)$ on kaksi juurta?

4 KORKEAMMAN ASTEEN POLYNOMIFUNKTIO

4.1 Tekijöihin jakaminen

K48. Jaa tekijöihin.

a) $x^2 + x$

b) $3x^4 - 5x^3$

c) $9x^2 + 6x + 1$

d) $25x^2 - 20x + 4$

K49. Jaa tekijöihin.

a) $x^2 - 1$

b) $9x^2 - 1$

c) $3x^3 - x^2 + 9x - 3$

d) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

K50. Jaa tekijöihin.

a) $x^5 - 9x^3$

b) $x^3 - 2x^2 - 16x + 32$

c) $4x^2(x + 1)^3 - 2x^3(x + 1)^2$

d) $xy^4 - x^5$

K51. Supista murtolauseke.

a) $\frac{x^5 - x^3}{x - 1}$

b) $\frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$

c) $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

4.2 Korkeamman asteen yhtälö

K52. Ratkaise yhtälö.

a) $(x + 2)(x^2 - 9) = 0$

b) $3x^3 - 12x^2 - 15x = 0$

c) $2x^4 - 4x^3 = -16x + 32$

K53. Ratkaise yhtälö.

a) $2x^3 - 6x^2 - 8x + 24 = 0$

b) $5x^5 - 20x^3 = 0$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

K54. Määritä vakio a siten, että yhtälöllä $x^3 + 3(2a - 1)x^2 - 4x + 1 - a = 0$ on juurena $x = 1$. Mitkä ovat tällöin muut juuret? (Ylioppilaskoe, syksy 1986)

K55. Millä muuttujan x arvoilla luvut

a) $3x^2$, $x + 3$ ja x^3 ovat aritmeettisen jonon peräkkäisiä jäseniä

b) $64x$, x^3 ja $-x^2$ ovat geometrisen jonon peräkkäisiä jäseniä?

4.3 Korkeamman asteen epäyhtälö

K56. Ratkaise epäyhtälö.

a) $(x^2 - 1)(-x - 1) \geq 0$

b) $x^3 - 4x \geq 0$

c) $x^3 - x^2 - 2x < 0$

K57. Millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x) = 4x^4$ kuvaaja on funktion $g(x) = 9x^2$ kuvaajan alapuolella?

K58. Millä muuttujan x arvoilla funktio $f(x) = \sqrt{-x^3 + 9x} + \sqrt{x^4 - x^2}$ on määritelty?

K59. Minkä positiivisen kokonaisluvun kuutio on pienempi kuin luvun neliö kolminkertaisena?

K60. Määritä vakio a niin, että yhtälöllä $a^2x^2 - a^3x + \frac{13}{4}a^2 = 9$ ei ole reaalisia juuria.

4.4 Nollakohtien ja tekijöiden yhteys

K61. Jaa tekijöihin ratkaisemalla polynomin nollakohdat.

a) $2x^2 + 12x + 10$

b) $x^2 - 6x + 5$

K62. Muodosta toisen asteen funktio

a) jonka nollakohdat ovat -1 ja $\frac{1}{2}$ ja jonka arvo kohdassa 0 on -1

b) jonka nollakohdat ovat $-\frac{1}{3}$ ja 2 ja jonka arvo kohdassa -1 on 6.

K63. Määritä vakiolle c sellainen arvo, että murtolauseke $\frac{2x^2 - 12x + c}{5x - 35}$ voidaan supistaa. Supista murtolauseke. Millä muuttujan x arvoilla murtolauseke on määritelty?

K64. Polynomin $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 105$ kaksi tekijää ovat binomit $x + 3$ ja $4x - 5$. Polynomin $P(x)$ yksi nollakohta on sama kuin yhtälön $x^2 - 14x + 49 = 0$ ratkaisu. Millä muuttujan x arvoilla polynomi $P(x)$saa positiivisia arvoja?

A1. Sievennä.

a) $4(x+5)^2 + (2x+5)(2x-5)$

b) $2x(x-3)^2 - (x+1)(2x^2-18x)$

A2. Jaa tekijöihin.

a) $4x^2 - 24x + 36$

b) $2x^2 - 3x - 9$

c) $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x$

A3. Sievennä.

a) $3\sqrt{8} - \sqrt{50}$

b) $\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{3})$

c) $\dfrac{\sqrt{a^4} - \sqrt{\dfrac{4a^3}{a}}}{\sqrt{a^4} - \sqrt{16}}$, kun $a > 0$

A4. Määritä yhtälön juurten lukumäärä.

a) $2x^2 + 5x = 1$

b) $\dfrac{1}{9}x^2 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{3}x$

A5. Tutki, onko $\sqrt{28+16\sqrt{3}} = 4+2\sqrt{3}$.

A6. Millä muuttujan x arvoilla

a) $3x^2 - 5x = 2x^2 - 3x + 15$

b) $3x^2 - 5x > 2x^2 - 3x + 15$?

A7. Millä muuttujan x arvoilla

a) $x^4 - 4(x^2 - x) = x^3$

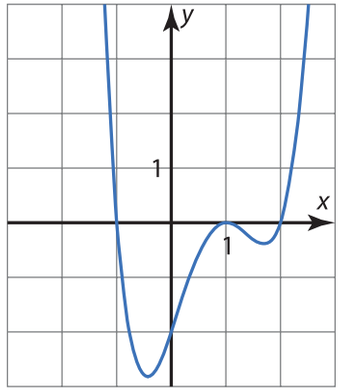
b) $x^4 - 4(x^2 - x) \geq x^3$?

A8. Alla on funktion $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$ kuvaaja. Päättele kuvaajan perusteella, millä muuttujan x arvoilla

a) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

b) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 < 0$

c) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \geq 0$.



A9. **a)** Sievennä lauseke $(1+x)^3 - (1-x)^3$. (Ylioppilaskoe, syksy 2006)

b) Sievennä lauseke $\dfrac{1}{a-1}\left(a - \dfrac{1}{a}\right)$. (Ylioppilaskoe, kevät 2006)

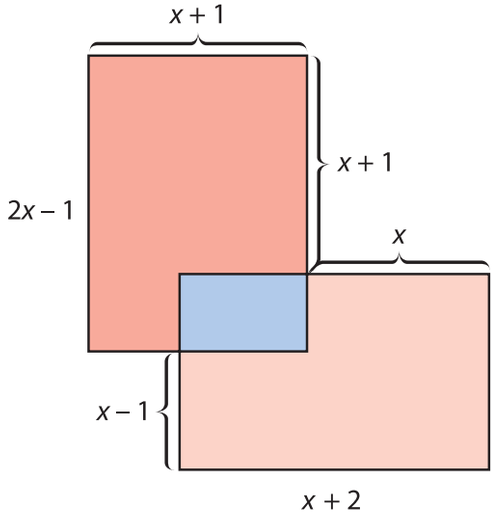
c) Sievennä lauseke $(a+b)^2 - (a-b)^2$ ja laske sen tarkka arvo, kun $a = 100^{300}$ ja $b = 100^{-300}$. (Ylioppilaskoe, kevät 1991)

TEHTÄVÄSARJA B

B1. **a)** Sievennä $x + 2(x-7)^2 - (x+4)(x-4)$.
b) Jaa tekijöihin $x^5 - 3x^4 - 9x^3 - 3x^2 - 10x$.
c) Ratkaise epäyhtälö $2x^2 - 6 \le x^2 + x$.

B2. Piirrä funktioiden $f(x) = x^3 - 9x$ ja $g(x) = 7x$ kuvaajat samaan koordinaatistoon. Päättele kuvaajan perusteella, millä muuttujan x arvoilla
a) $f(x) > 0$
b) $g(x) < 0$
c) $g(x) \ge f(x)$.

B3. Ratkaise muuttuja x, kun koko kuvion pinta-ala on 33.



B4. Mopoauton hinta laski viidessä vuodessa 12 500 eurosta 5550 euroon. Kuinka monta prosenttia hinta laski keskimäärin vuodessa?

B5. Muodosta neljännen asteen polynomifunktio, jonka arvo kohdassa 1 on -24 ja jonka
a) nollakohdat ovat -1, 0, 2 ja 3
b) kaksinkertaiset nollakohdat ovat -1 ja 2.

B6. Neliön muotoiselle tontille rakennetaan suorakulmion muotoinen talo, jonka pitempi sivu on puolet tontin sivusta ja lyhyempi kolmasosa tontin sivusta. Pihaaluetta jää tällöin $400\ \text{m}^2$. Laske tontin ala. (Ylioppilaskoe, syksy 1995)

B7. Millä vakion t arvoilla yhtälöllä $3x^2 + tx - 3x = 2x^2 - 2x - 1$ on vain yksi ratkaisu? Mikä tämä ratkaisu on?

B8. Pekka osti 36 metriä aitaa, josta hän rakentaa koiralle suorakulmion muotoisen aitauksen pihalle siten, että yhtenä sivuna on kotitalon seinä. Ilmaise lausekkeena aitauksen pinta-ala. Määritä, kuinka suuri aitauksen pinta-ala voi enimmillään olla.

B9. Autoilijan työmatkan kesto t riippuu liikennevirrasta m kaavan $t = 0{,}01m^2 + 0{,}03m + 18$ mukaisesti, missä t on ajoaika minuutteina ja m liikenteen mittauspisteen minuutissa ohittavien autojen määrä. Kuinka suuri saa liikennevirta enintään olla, jotta autoilijan työmatka kestäisi enintään puoli tuntia? (Ylioppilaskoe, kevät 1993)

B10. Murtolausekkeen $\dfrac{ax^3 - 12x^2 + bx}{x^2 - 3ax + 8}$ osoittaja on jaollinen binomilla $x - 4$ ja nimittäjä binomilla $x - 2$. Määritä vakioiden a ja b arvot ja supista murtolauseke. Millä muuttujan x arvoilla murtolauseke on määritelty?

Vastaukset

1.1 Polynomien summa ja erotus

1. a, b ja d

2. **a)** 4 **b)** $4x^2$ **c)** -1 **d)** 1

3. $2x^3 + x^2 - 3x + 7$

4. **a)**

	$24x$	
$13x$		$11x$
$5x$	$8x$	$3x$

b)

	$2x$	
$3x$		$-x$
$7x$	$-4x$	$3x$

c)

	0	
$4x$		$-4x$
$7x$	$-3x$	$-x$

5. **a)** -9 **b)** -5 **c)** 0

6. **a)** $5x^2 + 4x + 6$ **b)** $x^2 + x + 2$

7. **a)** $2x^2 + 4x + 1$ **b)** $7x + 8$

8. **a)** -1 **b)** $-2x^2 + 4x - 7$

9. **a)** $x = -1\frac{1}{4}$ **b)** $x = 1\frac{3}{4}$

10. $a = -2$

11. Olkoon n kokonaisluku. Koska
$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4)$
$= 5n + 10 = 5(n+2)$, viiden peräkkäisen kokonaisluvun summa on viisi kertaa keskimmäisen luvun $n+2$ suuruinen.

12. a ja d

13. **a)** 5 **b)** x^2 **c)** 0 **d)** -3

14. **a)** 7 **b)** 2 **c)** 2

15. $-4x^2 - 3x + 7$

16. **a)** $8x^2 - 6x + 8$ **b)** $5x^3 - 9x^2 + 1$

17.

	$x^2 + 3x$	
$3x^2 + 2x - 2$		$-2x^2 + x + 2$
$3x^2 - 5x$	$7x - 2$	$-2x^2 - 6x + 4$

18. **a)** summa $6x^2 + 4$, asteluku 2

b) erotus $2x - 4$, asteluku 1

19. erotus $-x^2 - x + 3$, arvo -3

20. **a)** $x = -\frac{4}{5}$ **b)** $x = 7\frac{1}{8}$

21. $a = -3\frac{3}{7}$

22. $a = 8$, $b = 13$ ja $c = -1$

23. **a)** $a = 7$, $b = 10$ ja $c = 13$

b) $a = 5\frac{1}{2}$, $b = 8\frac{1}{2}$ ja $c = 11\frac{1}{2}$

24. Muodosta parittomien lukujen $2m + 1$ ja $2n + 1$ summa ja erotus. Erota yhteinen tekijä ja tee tarvittavat päätelmät.

25. Kokonaisluvut ovat muotoa $10m + 5$ ja $10n + 5$. Muodosta niiden summa ja tee tarvittavat päätelmät.

1.2 Polynomien tulo

26. **a)** $3x^2$ **b)** $-6x^6$ **c)** x^{10}

27. **a)** $3x^2 - 4x$ **b)** $-10t^2 + 6t$

28. **a)** $8a^5 - 6a^4 + 2a^3$ **b)** $x^4 - 3x^3 + 4x^2$

29. **a)** $5x^2 + 22x + 21$ **b)** $6a^2 - 10a - 4$

30. **a)** $4x^3 - 2x^2 - 12x + 6$ **b)** $-24x^3 + 26x^2 - 6x$

31. **a)** $(x+5)(x-5) = x^2 - 25$

b) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

32. **a)** $x + 10$ **b)** $-8x + 50$

33. **a)** $p(-5) = 9$ **b)** $p(-5) = 29$

34. **a)** $3x^3 - 5x^2$ **b)** $2x^2 - 6x$

35. $x = 2$

36. **a)** $15a^5$ **b)** $20a^7$

37. **a)** $20x^4 - 24x^3 + 8x^2$ **b)** $-6x^4 - 15x^2 + 12x$

38. **a)** $5x^2 - (-2x)(3x - 4) = 11x^2 - 8x$

b) $2x(7x - 3) - (-4x)(-6x + 5) = -10x^2 + 14x$

39. **a)** $-6t^3 + 18t^2$ **b)** $6t^3 - 5t^2 + 6t$

40. **a)** $\left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{5}{24}$

b) $(7 + x)(x - 7) = x^2 - 49$

41. $6x^3 - 16x + 16$

42. **a)** $9x^2 - 24x + 16$ **b)** $4x^4 - 4x^2 + 1$

c) $x^6 + 4x^3 + 4$

43. $32x^4 - 2$

44. **a)** $x + 1$ **b)** $x - 2$ **c)** $\frac{x^2}{2}$ **d)** $\frac{x}{3}$

45. **a)** $x = \frac{7}{12}$ **b)** $x = 7$

46. **a)** $p(-1) = -6$ **b)** $p(-1) = 0$

47. $a = 1$

48. 4

49. $x = 2$

50. $x = 6$

51. myyntitulo on $-0{,}2x^2 + 20x + 1500$, yhden euron hinnalla

1.3 Binomin neliö ja kuutio

52. **a)** $a^2 + 6a + 9$ **b)** $a^2 + 2a + 1$ **c)** $9a^2 + 6a + 1$

53. **a)** $a^2 - 8a + 16$ **b)** $b^2 - 16b + 64$ **c)** $9 - 6x + x^2$

54. **a)** $(2x + 6)^2 = 4x^2 + 24x + 36$

b) $(2x)^2 + 6^2 = 4x^2 + 36$

55. **a)** $49x^2 + 14x + 1$

b) $4x^2 - 16x + 16$

c) $25 - 40x + 16x^2$

56. **a)** $x^4 + 2x^2 + 1$

b) $x^6 - 8x^3 + 16$

c) $x^8 + 12x^4 + 36$

57. **a)** $x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$

b) $x^6 - 2x^4 + x^2$

c) $9x^6 + 6x^3 + 1$

58. **a)** $(x + y)^2$ **b)** $(x - 1)^2$

59. **a)** $a = 16$ **b)** $a = 10$ tai $a = -10$ **c)** $a = 4$

60. **a)** $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

c) $-x^3 + 6x^2 - 12x + 8$

61. **a)** $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

b) $125x^3 + 75x^2 + 15x + 1$

c) $-x^3 - 3x^2 - 3x - 1$

62. $x = 4$

63. 995 ja 996

64. **a)** $25x^2 + 10x + 1$

b) $x^2 - 14x + 49$

c) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

65. **a)** $(3 + x)^2 = 9 + 6x + x^2$

b) $(5 + 2x)^2 = 25 + 20x + 4x^2$

c) $(8x)^2 + 3^2 = 64x^2 + 9$

66. **a)** $9x^2 + 24x + 16$

b) $\frac{x^2}{4} - 4x + 16$

c) $16x^2 - 1$

67. **a)** $x^6 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{9}$

b) $x^6 - 2x^4 + x^2$

c) $\frac{9}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 1$

68. **a)** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ **b)** $(2x - 5)^2$

69. **a)** $a = 9$ **b)** $a = 9$ **c)** $a = 16$ tai $a = -16$

70. **a)** $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

b) $-27x^3 + 27x^2 - 9x + 1$

c) $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$

71. **a)** $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

b) $125x^3 + 150x^2 + 60x + 8$

c) $-x^6 - 3x^4 - 3x^2 - 1$

72. Pinta-ala on 900 cm^2.

73. Luvut ovat 486 ja 488. Seuraava yhtä hyvä vuosi oli 1956.

74. **a)** Luvun $(10n + 5)^2 = 100(n^2 + n) + 25$ kaksi viimeistä numeroa ovat 25.

b) Luku $(10n + 5)^2 = 100n(n + 1) + 25$. Esimerkiksi
$65^2 = 100 \cdot 6 \cdot 7 + 25 = 4200 + 25 = 4225$.

75. Olkoon luvut a ja b.
Luku $(a + b)^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ on kokonaisluvun neliö.

76. Olkoon n kokonaisluku. Parittoman luvun kuutio $(2n + 1)^3$ voidaan sieventää muotoon $2(4n^3 + 6n^2 + 3n) + 1$, mistä nähdään, että se on pariton luku.

77. **a)** 1 4 6 4 1

b) $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

c) $(x + 3)^4 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$,
$(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

1.4 Summan ja erotuksen tulo

78. **a)** $x^2 - 49$ **b)** $x^2 - 1$ **c)** $-2x^2 - 3x + 9$

79. **a)** $4x^2 - 9$ **b)** $x^4 - 64$

80. **a)** $5x^2 - 20$ **b)** $-x^2 + 18$

81. **a)** $x^6 - 81$ **b)** $x^4 - 9$

82. **a)** $x^2 + 1$ **b)** $-3x^2 + 1$

83. **a)** $x^4 - 81$ **b)** $4x - 20$

84. **a)** $x = 5$ **b)** $x = -3\frac{3}{4}$

85. **a)** $(x + 4)(x - 4)$

b) $(3x + 1)(3x - 1)$

c) $(5x + 3)(5x - 3)$

86. a) $\frac{x-4}{3}$ b) $1+3x$ c) $\frac{5}{x-3}$

87. a) 400 b) 600

88. a) $9x^2-16$ b) $x^2-\frac{1}{4}$ c) $-9x^2-12x-4$

89. a) $4x^4-25$ b) x^2-16 c) $16a^6-4b^4$

90. a) $x-2(x+3)=-x-6$

b) $x^2-(x+3)(x-3)=9$

c) $(x+3)^2-(x-3)^2=12x$

91. a) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=x+\frac{1}{2}$

b) $((x+3)(x-3))^2=x^4-18x^2+81$

92. a) $x=\frac{27}{20}$ b) ei ratkaisua

93. a) $2401x^4-1296$ b) $6x^4-24x^2+64$

94. a) $(x+7)(x-7)$

b) $(2x+3)(2x-3)$

c) $(x+2)(x-2)(x^2+4)$

95. a) $x-7$ b) $6x+1$ c) $\frac{(x^2+4)(x-2)}{2}$

96. a) $\frac{x+5}{4}$ b) $\frac{2x+1}{3(1-2x)}$

97. Jaa tekijöihin lauseke n^3-n ja tee tarvittavat päätelmät.

98. a) $31=2^5-1$, $127=2^7-1$, $8191=2^{13}-1$

b) Koska $n=2k$, missä $k=2, 3, 4, \ldots$, luku 2^n-1 voidaan ilmaista tulona $(2^k+1)(2^k-1)$.

99. $1023=2^{10}-1=(2^5-1)(2^5+1)=31\cdot 33$

2.1 Neliöjuuri

100. a) 3 b) 1 c) 0 d) 10

101. a) $\sqrt{25}=5$ b) $\sqrt{13}$ c) $-\sqrt{13}$

102. a) 9 b) -5 c) ei ole määritelty d) 12

103. 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841 ja 900

104. a) 4 b) 8 c) 10

105. a) 2,646 b) 11,225 c) 1,612

106. a) 23 b) 19 c) 7

107. a) $x=7$ tai $x=-7$

b) $x=\sqrt{13}$ tai $x=-\sqrt{13}$

c) ei mikään luku

108. a) $x=6$ tai $x=-6$

b) $x=9$ tai $x=-9$

c) $x=\sqrt{5}$ tai $x=-\sqrt{5}$

109. a) 3,0 m b) 5,3 m c) 190 m

110. a) $\sqrt{121}=11$ b) $\sqrt{3600}=60$

c) $\sqrt{0{,}09}=0{,}3$ d) $\sqrt{2{,}25}=1{,}5$

111. a) $\sqrt{9}-\sqrt{25}=-2$

b) $\sqrt{9-25}=\sqrt{-16}$, ei ole määritelty

112. a) 1 b) 81 c) ei minkään reaaliluvun

113. a) 17 b) π c) $1+\sqrt{2}$

114. a) 20 b) 3

115. a) 13 b) 20

116. a) 16 b) 81 c) 49

117. a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{6}$

118. a) $x=9$ tai $x=-9$ b) $x=4$ tai $x=-4$

119. a) $x=\sqrt{11}$ tai $x=-\sqrt{11}$

b) $x=\sqrt{2}$ tai $x=-\sqrt{2}$

120. a) 151 km b) 210 km

121. a) 3,167; laskin 3,162

b) 5,917; laskin 5,916

c) 11,364; laskin 11,358

2.2 Neliöjuuren laskusäännöt

122. a) 40 b) 6 c) 10

123. a) $\frac{2}{5}$ b) $1\frac{1}{3}$ c) $1\frac{1}{2}$

124. a) 2 b) 2 c) 5

125. a) 16 b) 3 c) -13

126. a) $2\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{2}$ c) $5\sqrt{3}$

127. a) $2\sqrt{5}$ b) $3\sqrt{2}$

128. a) $2\sqrt{5}+5\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

129.

$\sqrt{8}$	16	$\sqrt{2}$
2	4	8
$8\sqrt{2}$	1	$\sqrt{32}$

130. a) $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50}=10\sqrt{2}$

b) $\sqrt{8+18+50}=2\sqrt{19}$

131. a) $\sqrt{48}-\sqrt{32}=4\sqrt{3}-4\sqrt{2}$

b) $\sqrt{48-32}=4$

132. a) 0 b) 2

133. a) 10 b) 36

134. a) $\frac{1}{3}$ b) $2\frac{1}{2}$ c) $1\frac{1}{4}$

135. a) 24 b) 3 c) 3

136. **a)** 17,32 **b)** 173,2 **c)** 0,1732

137. **a)** 72 **b)** 48 **c)** 98

138. **a)** 9 **b)** $3\sqrt{3}$ **c)** Ei ole määritelty.

139. **a)** $7\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ **b)** $12\sqrt{10} - 12\sqrt{5}$

140. $\frac{1}{20}$

141. **a)** $\sqrt{7^3} = 7\sqrt{7}$

b) $\sqrt{3^8} = 81$

c) $\sqrt{3^5} = 9\sqrt{3}$

142. **a)** 5 **b)** $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ **c)** $2\sqrt{2}$

143. Järjestys pienimmästä suurimpaan on $6\sqrt{2}$, $\sqrt{73}$ ja $5\sqrt{3}$.

144. **a)** $10 - 5\sqrt{3}$ **b)** $44 + 10\sqrt{5}$

145. **a)** $6a$ **b)** $5a^2\sqrt{a}$

146. **a)** $20a^3$ **b)** $10a$

147. **a)** 7^{52} on epänegatiivinen luku ja $(7^{52})^2 = 7^{104}$.

b) 3^{157} on epänegatiivinen luku ja $(3^{157})^2 = 3^{314} = (-3)^{314}$.

148. On osoitettava, että $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0$ ja että $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$.

149. Lavenna lauseke luvulla

a) $\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{5}$ **c)** $\sqrt{2}$.

150. $5 - \sqrt{3}$ on epänegatiivinen luku ja $(5 - \sqrt{3})^2 = 25 - 10\sqrt{3} + 3 = 28 - 10\sqrt{3}$.

2.3 Korkeammat juuret

151. **a)** $f(-2{,}5) = -15{,}6$ ja $f(2{,}5) = 15{,}6$

b) $-0{,}1$ ja $0{,}1$ **c)** $x = 2$ **d)** $x \approx -1{,}6$

152. **a)** $\sqrt[7]{-35} \approx -1{,}662$ **b)** $\sqrt[6]{34} \approx 1{,}800$

c) ei ole määritelty **d)** $\sqrt[5]{5} \approx 1{,}380$

153. **a)** $\sqrt[6]{4096} = 4$; luvut -4 ja 4

b) ei ole määritelty; ei mikään luku

c) $\sqrt[7]{128} = 2$; luku 2

d) $\sqrt[7]{-128} = -2$; luku -2

154. **a)** $x = \sqrt[4]{8}$ tai $x = -\sqrt[4]{8}$ **b)** $x = \sqrt[7]{28}$

c) $x = \sqrt[8]{7}$ tai $x = -\sqrt[8]{7}$ **d)** $x = \sqrt[3]{-17}$

155. **a)** -3 tai 3 **b)** 9

156. **a)** $\frac{2}{5} = 0{,}4$ **b)** 15 625

157. 7,6 %

158. 10,9 %

159. **a)** $f(-1{,}6) = 6{,}6$ ja $f(1{,}6) = 6{,}6$

b) $0{,}4$ ja $0{,}4$

c) $x \approx -1{,}7$ tai $x \approx 1{,}7$

160. **a)** $\sqrt[4]{64} \approx 2{,}828$ **b)** $\sqrt[5]{-32\,768} = -8{,}000$

c) $\sqrt[3]{12} \approx 2{,}289$ **d)** ei ole määritelty

161. **a)** $x = \sqrt[4]{2}$ tai $x = -\sqrt[4]{2}$

b) $x = \sqrt[7]{50}$

c) $x = \sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7}$

162. **a)** $x = 2$ **b)** $x = 5$ **c)** $x = \sqrt[3]{5} + 2$

163. $S_5 = 211$, kun $q = \frac{3}{2}$. $S_5 = 55$, kun $q = -\frac{3}{2}$.

164. 19,77

165. **a)** 0,9 % **b)** 1,9 % **c)** 1,2 %

166. 41 kBq/m^2

167. **a)** $\sqrt{20} \approx 4{,}5$ **b)** $\sqrt[3]{120} \approx 4{,}9$ **c)** $\sqrt[4]{840} \approx 5{,}4$

168. $x = \sqrt{ab}$. Keskiverto on yhtä suuri kuin geometrinen keskiarvo.

169. **a)** Luku 4,9 % saadaan ratkaisemalla yhtälö $k^3 = 1{,}107 \cdot 1{,}033 \cdot 1{,}010$. Kyseessä on geometrinen keskiarvo.

b) Laski 1,1 %.

3.1 Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja

170. **a)** $g(x)$ **b)** $i(x)$ **c)** $f(x)$ **d)** $h(x)$

171. **a)** $(-1, -4)$ **b)** kaksi juurta, $x = -3$ ja $x = 1$

172. **a)** $(2, 0)$ **b)** yksi juuri, $x = 2$

173. **a)** $-3 < x < 1$

b) $x < -3$ tai $x > 1$

c) $x \leq -3$ tai $x \geq 1$

174. **a)** $x = 2$ **b)** $x \neq 2$

c) ei millään muuttujan arvolla

175. **a)** $c > 0$ **b)** $c = 0$ **c)** $c < 0$

176. **a)** Kun $a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin. Kun $a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin. Paraabeli on sitä kapeampi, mitä suurempi $|a|$ on.

b) Paraabeli leikkaa y-akselin pisteessä $(0, c)$. Kun c suurenee, niin paraabeli nousee ylöspäin.

c) Ovat.

d) $a = -0{,}5$ ja $c = -3$

177. **a)** $f(x)$ **b)** $g(x)$ **c)** $h(x)$

178. **a)** $(-1, 6)$

b) Kaksi juurta, likiarvot ovat $-3{,}4$ ja $1{,}4$.

179. **a)** $x \neq -1{,}5$
b) kaikilla muuttujan arvoilla
c) $x = -1{,}5$

180. **a)** Korkeus on 5,0 m ja leveys 6,3 m.
b) Tunnelin korkeus kohdassa $x = 1{,}3$ (m) on $y = 4{,}155$ (m). Kuorma-auto mahtuu ajamaan tunnelin läpi.

181. **a)** $x = 5$ tai $x = -5$
b) $x = 8$ tai $x = -2$
c) $x = 1$ tai $x = -9$

182. **a)** $x = \frac{1}{3}$ **b)** $x = 1$ tai $x = -\frac{1}{3}$ **c)** ei juuria

183. **a)** $c < 15$ **b)** $c = 15$ **c)** $c > 15$

184. $k = 9$, kohta $x = 0$

185. **a)** Kun $a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin. Kun $a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin. Paraabeli on sitä kapeampi, mitä suurempi $|a|$ on.
b) Paraabeli leikkaa y-akselin pisteessä $(0, c)$. Kun c suurenee, niin paraabeli nousee ylöspäin.
c) Nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = -b$. Huippu on kohdassa $x = -\frac{b}{2}$.
d) Nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = -\frac{b}{a}$. Huippu on kohdassa $x = -\frac{b}{2a}$.

3.2 Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

186. **a)** $x = 1$ tai $x = 3$ **b)** $x = -1$ tai $x = \frac{4}{5}$

187. **a)** $x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ tai $x = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ **b)** ei juuria

188. **a)** $x = -9$ tai $x = 0$ **b)** $y = 0$ tai $y = \frac{5}{4}$

189. **a)** $x = 3$ **b)** $x = -1$ tai $x = 4$

190. **a)** $x = -1$ tai $x = \frac{1}{3}$
b) $x = -2\sqrt{2}$ tai $x = 2\sqrt{2}$

191. **a)** $x = -1 - \sqrt{5}$ tai $x = -1 + \sqrt{5}$
b) $x = 2 - \sqrt{3}$ tai $x = 2 + \sqrt{3}$

192. 3 ja 11 vuotta

193. $a = -1$ tai $a = 4$

194. $a = -3$, $x = -6$

195. **a)** $x = -3$ tai $x = 2$ **b)** $x = -\frac{1}{3}$ tai $x = \frac{1}{2}$

196. **a)** $x = -\frac{1}{5}$ tai $x = 0$ **b)** $x = -1$ tai $x = \frac{2}{3}$

197. **a)** $x = 3 - \sqrt{3}$ tai $x = 3 + \sqrt{3}$
b) $x = -1 - \sqrt{2}$ tai $x = -1 + \sqrt{2}$

198. **a)** $t = 0$ tai $t = 10$
b) ei millään muuttujan t arvolla **c)** $t = 5$

199. **a)** $x = \frac{1}{3}$ **b)** $x = -\frac{1}{3}$ tai $x = \frac{1}{2}$

200. $x = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$ tai $x = \frac{4+\sqrt{2}}{2}$

201. 2 ja 7 vuotta

202. vuosi 1935

203. 3, 4 ja 5

204. $a = 1$, $t = 1 - \sqrt{10}$ tai $t = 1 + \sqrt{10}$

205. Kun $a = -3$, funktion toinen nollakohta on $\frac{3}{2}$. Kun $a = 6$, funktion toinen nollakohta on 6.

206. Sijoittamalla $x = -1$ saadaan yhtälö $1 + a^2 - 1 - a^2 = 0$, joka on tosi kaikilla vakion a arvoilla. Sijoittamalla $x = 2$ saadaan yhtälö $-3a^2 + 6 = 0$, jonka juuret ovat $a = -\sqrt{2}$ ja $a = \sqrt{2}$.

3.3 Toisen asteen epäyhtälö

207. $x < -1$ tai $x > 4$

208. $-3 < x < 0$

209. **a)** $x \leq -\frac{3}{2}$ tai $x \geq 1$ **b)** $x < 1$ tai $x > 8$

210. **a)** $-3 \leq x \leq 3$ **b)** $-2 < x < 2$

211. **a)** $x \neq 2$ **b)** $x = -1$

212. **a)** $-1 < x < 5$ **b)** $x \leq -1$ tai $x \geq -\frac{1}{3}$

213. Funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole nollakohtia. Siten funktio saa vain negatiivisia arvoja.

214. 1, 2, 3, 4, ja 5

215. **a)** $x \leq 0$ tai $x \geq 7$ **b)** $x \leq \frac{2}{3}$ tai $x \geq 5$

216. **a)** $x \leq 2$ tai $x \geq 3$ **b)** $-1 < x < 0$

217. **a)** $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
b) Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut.

218. **a)** Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut.
b) $x = 2$

219. Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka ainoa nollakohta on $x = 3$. Siten funktio ei saa negatiivisia arvoja.

220. $1 < x < 2$ tai $3 < x < 4$

221. **a)** $x < -2\frac{1}{2}$ tai $x > \frac{2}{3}$ **b)** $\frac{1}{2} \leq x < 1$

222. $0 < x < 1$

223. $x \geq 5$

224. 4,5 s

225. Neliön sivun pituus on vähintään 5 cm ja enintään 20 cm. Pahvia tarvitaan vähintään 40 cm ja enintään 70 cm.

3.4 Sovelluksia

226. **a)** pituus $18 - x$, pinta-ala $x(18 - x) = 18x - x^2$
b) pituus $63 - x$, pinta-ala $x(63 - x) = 63x - x^2$

227. **a)** $x(82 - x) = 82x - x^2$
b) $82x - x^2 = 1600$, $x = 32$ tai $x = 50$
c) 50 m ja 32 m

228. **a)** $x(x + 7) = x^2 + 7x$
b) $x^2 + 7x = 144$, $x = 9$

229. 2,5 m

230. 1,8 m

231. 3 m ... 12 m

232. **a)** $a_n = 3n - 5$ **b)** 28 jäsentä

233. 141. jäsen

234. 62 m ja 38 m

235. 84

236. pituus 120 cm ja leveys 80 cm

237. 2,2 m

238. 8 cm

239. 11 cm

240. Tuolit riittävät 16 riviin. Viimeisessä rivissä on 68 tuolia.

241. jonon 59. jäsen

242. **a)** 0,382 ja 0,618

243. 103 m

244. 11,8 m

245. 46 tai 64

3.5 Diskriminantti

246. **a)** $D = 132$, kaksi juurta **b)** $D = 0$, yksi juuri

247. **a)** $D = 221{,}0049$; kaksi juurta
b) $D = 64$, kaksi juurta

248. **a)** yksi juuri **b)** kaksi juurta

249. **a)** $q < 4$ **b)** $q = 4$ **c)** $q \geq 4$

250. $-4 < k < 4$

251. Kun $p = -12$, $x = 2$. Kun $p = 12$, $x = -2$.

252. Osoita, että yhtälön $x(12 - 3x) = 13$ diskriminantti on negatiivinen.

253. $b = -4$ tai $b = 4$

254. $-\frac{4}{3} < k < \frac{4}{3}$

255. **a)** $D = -146{,}6228$; ei yhtään juurta
b) $D = 328$, kaksi juurta

256. **a)** kaksi juurta **b)** yksi juuri

257. **a)** $c < 18$ **b)** $c > 18$ **c)** $c \leq 18$

258. $b < -6$ tai $b > 6$

259. **a)** ei **b)** kyllä **c)** kyllä

260. $c \leq 234$

261. $q = 8$, $(-1, 3)$

262. Kun $a = 1$, $x = 1$. Kun $a = 9$, $x = -\frac{1}{3}$.
Kun $a = 0$, $x = \frac{1}{3}$.

263. $1 < a < 0$ tai $0 < a < 9$

264. $0 \leq a \leq 12$

265. **a)** Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juuret ovat $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}$ ja $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}$.
b) Symmetrian perusteella paraabelin huippu on kohdassa $x = -\frac{b}{2a}$.
c) $(-15{,}5;\ 0)$ ja $(11{,}5;\ -9{,}25)$

4.1 Tekijöihin jakaminen

266. **a)** $(x + 4)^2$ **b)** $(5 + y)^2$ **c)** $(2z + 1)^2$

267. **a)** $(x - 6)^2$ **b)** $(2x - 5)^2$ **c)** $(x + 1)^2 (x - 1)^2$

268. **a)** $(z - 3)(z + 3)$
b) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$
c) $(1 - y)(1 + y)(1 + y^2)$

269. **a)** $x^2(x - 25)$ **b)** $8x^4(4x + 1)$ **c)** $z^9(z + 1)$

270. **a)** $x(x - 4)(x + 4)$
b) $x(4x - 1)(4x + 1)$
c) $x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

271. **a)** $y(y + 1)^2$ **b)** $y(y - 2)^2$ **c)** $y(3y + 1)^2$

272. **a)** $(x - 5)(7x + 2)$
b) $(y + 1)(y + 1)(y - 1)$
c) $(z - 1)(2 + z)$

273. **a)** $(x^2 + 3)(x - 5)$
b) $(x^2 + 1)(x^3 - 1)$
c) $(5x + 1)(x - 1)(x + 1)$

274. **a)** $x(x - 3)(x + 3)(x - 7)$
b) $(x^5 + 1)(x - 1)(x + 1)$
c) $-(x - 1)(x + 1)(3x - 4)$ eli $(1 - x)(1 + x)(3x - 4)$

275. **a)** $(x - 7)(x + 1)$
b) $(y + 2)(y + 5)$
c) $2(z - 3)(z - 1)$

276. **a)** $(6x + 5)^2$ **b)** $(3x + \frac{1}{2})^2$ **c)** $(x - \frac{1}{3})^2$

277. **a)** $(z + 9)(z - 9)$
b) $(3t + s)(3t - s)$
c) $(4 + x^2)(2 + x)(2 - x)$

278. a) $\frac{x+3}{2}$ b) $\frac{x-3}{x}$ c) $\frac{x-3}{x+3}$

279. a) $x(x-1)$ b) $x^2-1=(x-1)(x+1)$
c) $\frac{x(x+5)}{2}$

280. a) $(x+1)^3$ b) $(2x-1)^3$ c) $(x+2)^3$

281. a) $(3x+1)(x^2+4)$
b) $(2x+1)(x^3-5)$
c) $(x^2-5)(7x^3+1)$

282. a) $(2x-1)(3x+1)$
b) $(y-7)(y-3)$
c) $(z+4)(3z+1)$

283. a) $(x-2)(x+1)(x+3)$
b) $(x-1)(3x-1)(3x+1)$

284. $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

285. $x^2-1=(x+1)(x-1)$

286. $a^2+\frac{1}{2}b^2$

4.2 Korkeamman asteen yhtälö

287. a) $x=-\frac{1}{2}$ tai $x=3$

288. a) $x=0$ tai $x=14$
b) $x=-8$ tai $x=0$
c) $x=0$ tai $x=\frac{1}{9}$

289. a) $x=-7$, $x=0$ tai $x=7$
b) $x=0$
c) $x=-1$, $x=0$ tai $x=1$

290. a) $x=-\frac{1}{7}$ tai $x=-1$ b) $x=0$ tai $x=-\frac{8}{7}$

291. a) $x=-4$, $x=0$ tai $x=1$
b) $x=-4$, $x=0$ tai $x=6$

292. a) $x=0$ tai $x=3$ b) $x=0$ tai $x=\frac{1}{4}$

293. a) $x=1$ tai $x=7$ b) $x=1$

294. a) $x=\frac{4}{3}$ b) $x=-1$ tai $x=1$

295. a) Luvut -1, 0 ja 1. b) Luvut -2, 0 ja 1.

296. Luvun a kaikilla arvoilla.

297. a) $x=-\frac{1}{3}$, $x=0$ tai $x=1$

298. a) $x=-\frac{4}{7}$ tai $x=0$ b) $x=0$ tai $x=\frac{1}{6}$
c) $x=-4$, $x=0$ tai $x=4$
d) $x=-\frac{1}{6}$, $x=0$ tai $x=\frac{1}{6}$

299. a) $x=-7$, $x=0$ tai $x=4$
b) $x=-1$, $x=0$ tai $x=\frac{5}{4}$

300. a) $x=-6$, $x=-\sqrt{\frac{3}{5}}$ tai $x=\sqrt{\frac{3}{5}}$
b) $x=-\sqrt[4]{3}$, $x=-1$ tai $x=\sqrt[4]{3}$

301. $x=-1$ tai $x=1$

302. a) $x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$ tai $x=1$
b) $x=-2$, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$ tai $x=2$
c) *ei* ratkaisua

303. a) $-\sqrt{3}$, 0 ja $\sqrt{3}$ b) -1, 0 ja 1

304. Luvut ovat 1, 2, 3.

305. a) $x=2$ b) $x=\frac{1}{2}$ tai $x=1$

306. $q=-\frac{1}{2}$ ja $a_5=-\frac{3}{2}$,
$q=0$ ja $a_5=-3$ tai
$q=1$ ja $a_5=-6$.

307. $q\approx -0{,}94$, $q=0$ tai $q\approx 0{,}94$

308. Kun $a=48$, juuret ovat $x=-\frac{2}{3}$ ja $x=0$.
Kun $a=-48$, juuret ovat $x=0$ ja $x=\frac{2}{3}$.

4.3 Korkeamman asteen epäyhtälö

309. a) $x>1$ b) $x<-1$ tai $x>1$
c) $x>1$ d) $x<-1$ tai $x>1$

310. a) $-1<x<0$ tai $x>3$
b) $-2<x<-1$ tai $0<x<2$

311. a) $-3<x<0$ tai $x>2$ b) $x>5$

312. a) $x<-8$ tai $0<x<1$ b) $x<-2$ tai $x>2$

313. a) $-\frac{1}{4}<x<0$ tai $x>\frac{1}{2}$
b) Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut.

314. a) $x<-2$ tai $2<x<3$
b) $x<-3$ tai $-1<x<1$

315. a) $x\le -\sqrt{3}$ tai $\sqrt{3}\le x\le 6$ b) $x\ge\frac{6}{5}$

316. a) $-2<x<0$ b) $x<0$ tai $0<x<3$
c) $x<-3$ tai $x>3$

317. Luvut, jotka toteuttavat ehdon $-1<x<0$ tai $x>1$.

318. Luvut, jotka toteuttavat ehdon $x<0$ tai $0<x<1$.

319. a) $-2\le x\le 0$ tai $x\ge 2$
b) $-2\le x\le 2$
c) $x\le -2$, $x=0$ tai $x\ge 2$

320. a) $x<-1$ tai $0<x<\frac{11}{2}$ b) $0<x<5$

321. a) $x=0$ tai $x\ge 2$
b) $x\le 1-\sqrt{10}$ tai $0\le x\le 1+\sqrt{10}$

322. **a)** $-2 \le x \le 0$ tai $x \ge 9$

b) $-5 < x < 0$ tai $x > 5$

323. **a)** $x < -\frac{1}{3}$ tai $\frac{1}{3} < x < 5$ **b)** $x \le 1$ tai $x \ge 6$

324. **a)** $x = -3$, $x = 2$, $x = 3$ tai $x = 10$

b) $-3 < x < 2$ tai $3 < x < 10$

325. **a)** $x = -1$, $x = \frac{2}{3}$ tai $x = 1$

b) $x < -1$ tai $-1 < x < \frac{2}{3}$ tai $x > 1$

326. **a)** $x < -2$ tai $x > 2$

b) $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$

c) $-\sqrt{3} < x < 0$ tai $0 < x < \sqrt{3}$

327. Eivät toteuta.

328. $-1 < k < 1$

329. $-\frac{1}{2} < k < 0$ tai $0 < k < 1$

330. Sievennä funktion lauseke muotoon $f(x) = x(x^2 + ax + a^2 + 1)$ ja osoita, että funktion $x^2 + ax + a^2 + 1$ kaikki arvot ovat positiivisia.

4.4 Nollakohtien ja tekijöiden yhteys

331. **a)** $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$

b) $x^2 + x - 30 = (x - 5)(x + 6)$

c) $-3x^2 + 6x - 3 = -3(x - 1)^2$

332. **a)** $x = \frac{2}{5}$ **b)** $25\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = (5x - 2)^2$

333. $-2(x + 2)(x - 3)$

334. **a)** $3(x + 6)(x - 1) = 0$ eli $3x^2 + 15x - 18 = 0$

b) $3(x + 6)^2 = 0$ eli $3x^2 + 36x + 108 = 0$

335. $8x(x + 4)(x - 6)$

336. $2x(x + 3)(x - \frac{1}{4})$

337. $c = -36$, toinen tekijä $3(x + 6)$

338. $b = 4$, toinen tekijä $x - 8$

339. $c = -18$, $\frac{x-3}{2}$, $x \ne -6$

340. $b = 22$, $\frac{2x+12}{3}$, $x \ne \frac{1}{2}$

341. $\frac{1}{3}(x + 2)(x + 6)$

342. $12(x + 3)(x - \frac{5}{2})(x - \frac{1}{3})$

343. **a)** $x = \frac{1}{7}$ tai $x = \frac{1}{4}$

b) $28(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{7}) = (4x - 1)(7x - 1)$

344. $c = 81$, kaksoisjuuri -9

345. $a = 36$, kaksoisjuuri $\frac{5}{6}$

346. $k = -2$, $x - 3$; $k = 3$, $x + 2$

347. $b = -3$, $\frac{x+1}{x+4}$ tai $b = 3$, $\frac{x-1}{x-4}$, $x \ne -4$ ja $x \ne 4$

348. $c = -3$, $(x - 3)(x + 3)^2$, $x \ne 3$ tai
$c = 3$, $(x - 3)^2(x + 3)$, $x \ne -3$

349. **a)** 3 **b)** $\frac{5}{4}$

c) Saatujen juurten summa -3 ei ole $-\frac{b}{a}$.

d) $x = -\frac{7}{5}$ **e)** $x = -\frac{5}{9}$ tai $x = 1$

350. **a)** Koska polynomin $x^n - 1$ nollakohta on $x = 1$, niin polynomi on jaollinen binomilla $x - 1$.

b) Luku $55^{99} - 1$ on jaollinen luvulla $55 - 1 = 54$.

351. Koska polynomin $x^{45} + 1$ nollakohta on $x = -1$, niin polynomi on jaollinen binomilla $x + 1$. Siten luku $123^{45} + 1$ on jaollinen luvulla $123 + 1 = 124$.

Kertaus

K1. **a)** $3x^3 + x^2 - 4x$ **b)** $x^4 + 3x - 1$

K2. **a)** $f(3) = 14$ **b)** $f(-1) = 6$

K3. **a)** $-2a + 2$ **b)** $14x + 2$

K4. **a)** 0 **b)** $-4x$

K5. **a)** $x = 6$ **b)** $x = -\frac{3}{7}$

K6. **a)** $6x^7$ **b)** $-4x^3$ **c)** $12x^9$ **d)** $-8x^{10}$

K7. **a)** $-4x^3 + 8x$ **b)** $x^7 - 3x^4$ **c)** $4x^4 - 20x^3$ **d)** $x^9 - 4x^8$

K8. **a)** $2x^2 + 5x + 3$

b) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

c) $-x^3 + 7x^2 - 10x$

d) $x^2 + 4x + 4$

K9. **a)** $P(x) = -40x^6$, $P(-1) = -40$

b) $P(x) = 6x^2 - 2x - 5$, $P(-1) = 3$

K10. $8a^3 + 4a^2 + 22a - 12$

K11. **a)** $4x^2 + 12x + 9$

b) $x^2 - 10x + 25$

c) $9x^2 - 6x + 1$

d) $x^8 - 6x^4 + 9$

K12. **a)** $x^2 + 8x + 16$

b) $x^6 + 2x^5 + x^4$

c) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$

d) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}x^2$

K13. **a)** $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

b) $-x^3 - 9x^2 - 27x - 27$

c) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

K14. a) $a = 9$, jolloin $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ tai $x^2 - 6x + 9 = (-x + 3)^2$.

b) $a = 25$, jolloin $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$ tai $x^2 + 10x + 25 = (-x - 5)^2$.

c) $a = 28$, jolloin $4x^2 - 28x + 49 = (2x - 7)^2$ tai $4x^2 - 28x + 49 = (-2x + 7)^2$.
Tai $a = -28$, jolloin $4x^2 + 28x + 49 = (2x + 7)^2$ tai $4x^2 + 28x + 49 = (-2x - 7)^2$.

d) $a = 4$, jolloin $4x^2 + 24x + 36 = (2x + 6)^2$ tai $4x^2 + 24x + 36 = (-2x - 6)^2$.

K15. a) $(-a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

b) $(-a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

K16. a) $x^2 - 36$ **b)** $9x^2 - 4$

c) $4x^2 - 25$ **d)** $16x^2 - 9$

K17. a) $4 - x^2$ **b)** $x^2 - y^2$

c) $25 - 4x^2$ **d)** $\frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{4}$

K18. a) $7x^2 + 4x - 6$

b) $x^6 - 14x^4 - 12x^3 + 18x^2$

K19. a) $\frac{x+5}{2}$

b) $1 - 2x$

c) $\frac{6}{4x+3}$

K20. a) $\sqrt{4} = 2$ **b)** $\sqrt{36} = 6$ **c)** $\sqrt{17}$

d) Koska $-16 < 0$, niin neliöjuurta ei ole määritelty.

K21. a) $x = -8$ tai $x = 8$

b) $x = -2$ tai $x = 2$

c) $x = -\sqrt{5}$ tai $x = \sqrt{5}$

K22. a) 3 **b)** 24 **c)** 2 **d)** $3a$

K23. a) $-\sqrt{3} - \sqrt{2}$ **b)** $28\sqrt{2}$

c) $5\sqrt{6} - 10\sqrt{3}$ **d)** $2\sqrt{5}$

K24. a) -1 **b)** $5 + 2\sqrt{6}$

K25. a) 3 **b)** $\frac{5}{3}$ **c)** $\frac{5}{2}$ **d)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

K26. a) Ei ole, koska $1 - \sqrt{2} < 0$.

b) On, koska $1 + \sqrt{2} \geq 0$ ja $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$.

K27. a) $\sqrt[7]{-2187} = -3$, $x = -3$

b) $\sqrt[4]{6561} = 9$, $x = 9$ tai $x = -9$

K28. a) $x = -2$ tai $x = 2$

b) $x = -2$

c) $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = \frac{3}{2}$

K29. a) 1 050 000

b) Kasvuprosentti pitäisi olla 2,44 %.

K30. 392,0 Hz

K31. a) $f(3) = -5$

b) $x = 0$ ja $x = 2$

c) $x = -2$ ja $x = 4$

d) $-2 < x < 4$

K32. a) $-4 < x < 0$

b) $x < 0$ tai $x > 2$

c) $x = -4$ ja $x = 0$

d) $x = 0$ ja $x = 2$

K33. 14 m/s

K34. a) $x = -1$ tai $x = 2$

b) $x = -4$ tai $x = \frac{1}{2}$

K35. a) $x = -3$ tai $x = 2$

b) $x = -1$ tai $x = -\frac{1}{2}$

K36. a) $s = 0$ tai $s = \frac{3}{4}$

b) $s = -\frac{1}{4}$ tai $s = 1$

c) ei millään arvolla

K37. Kun $a = \sqrt{3}$, yhtälön toinen juuri on $x = -2\sqrt{3}$.
Kun $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, yhtälön toinen juuri on $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

K38. a) $-1 \leq x \leq 2$ **b)** $x \neq 1$

c) Epäyhtälö toteutuu kaikilla x:n arvoilla.

K39. Kun $x \leq -1$ tai $x \geq 2$.

K40. luvut 1, 2, ... , 8

K41. a) sivun pituus $106 - 2x$,
pinta-ala $x(106 - 2x) = 106x - 2x^2$

b) $106x - 2x^2 = 1040$,
13 m ja 80 m tai 40 m ja 26 m

K42. 15 m

K43. 17 %

K44. a) ei yhtään juurta

b) kaksi juurta

c) yksi juuri

K45. a) $-1 < a < 1$

b) Ei millään a:n arvolla.
Vastaukseksi ei kelpaa $a < -\frac{1}{4}$, koska silloin funktion $g(x)$ kuvaaja olisi alaspäin aukeava paraabeli.

K46. Kun $t = -\frac{3}{2}$, niin $x = 2$.
Huomaa, että kun $t = 0$, niin yhtälö on identtisesti epätosi $2 = \frac{1}{2}$.

K47. $t < -3$ tai $t > 2$

K48. a) $x(x+1)$
b) $x^3(3x-5)$
c) $(3x+1)^2$
d) $(5x-2)^2$

K49. a) $(x+1)(x-1)$
b) $(3x+1)(3x-1)$
c) $(3x-1)(x^2+3)$
d) $(x-2)(x^2+4)$

K50. a) $x^3(x+3)(x-3)$
b) $(x-2)(x+4)(x-4)$
c) $2x^2(x+1)^2(x+2)$
d) $x(y^2+x^2)(y+x)(y-x)$

K51. a) $x^3(x+1)$ b) $\frac{x-4}{x+4}$ c) $x+1$

K52. a) $x = -3$ tai $x = -2$ tai $x = 3$
b) $x = -1$ tai $x = 0$ tai $x = 5$
c) $x = -2$ tai $x = 2$

K53. a) $x = -2$ tai $x = 2$ tai $x = 3$
b) $x = -2$ tai $x = 0$ tai $x = 2$
c) $x = -2$ tai $x = -1$ tai $x = 1$ tai $x = 2$

K54. $a = 1$. Tällöin muut juuret ovat $x = -4$ ja $x = 0$.

K55. a) $x = -3$ tai $x = -\sqrt{2}$ tai $x = \sqrt{2}$
b) $x = -4$ tai $x = 0$

K56. a) $x \le 1$
b) $-2 \le x \le 0$ tai $x \ge 2$
c) $x < -1$ tai $0 < x < 2$

K57. $-\frac{3}{2} < x < 0$ tai $0 < x < \frac{3}{2}$

K58. Funktio on määritelty, kun $x \le -3$ tai $1 \le x \le 3$.

K59. lukujen 1 ja 2

K60. $-3 < a < -2$ tai $2 < a < 3$

K61. a) $2x^2 + 12x + 10 = 2(x+1)(x+5)$
b) $x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1)$

K62. a) $2(x+1)(x-\frac{1}{2})$ eli $2x^2 + x - 1$
b) $3(x+\frac{1}{3})(x-2)$ eli $3x^2 - 5x - 2$

K63. $c = -14$, $\frac{2x+2}{5}$, $x \ne 7$

K64. Polynomi $P(x) = 4x^3 - 21x^2 - 64x + 105$ saa positiivisia arvoja, kun $-3 < x < \frac{5}{4}$ tai $x > 7$.

Tehtäväsarja A

A1. a) $8x^2 + 40x + 75$
b) $4x^2 + 36x$

A2. a) $(2x-6)^2$ eli $4(x-3)^2$
b) $2(x-3)(x+\frac{3}{2})$ eli $(x-3)(2x+3)$
c) $x(x+2)(x-2)^2$

A3. a) $\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2} - 3$ c) $\frac{a}{a+2}$

A4. a) kaksi juurta b) yksi juuri

A5. On.

A6. a) $x = -3$ tai $x = 5$ b) $x < -3$ tai $x > 5$

A7. a) $x = -2$ tai $x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = 2$
b) $x \le -2$ tai $0 \le x \le 1$ tai $x \ge 2$

A8. a) $x = -1$ tai $x = 1$ tai $x = 2$
b) $-1 < x < 1$ tai $1 < x < 2$
c) $x \le -1$ tai $x = 1$ tai $x \ge 2$

A9. a) $2x^3 + 6x$
b) $\frac{a+1}{a}$
c) $4ab = 4$, kun $a = 100^{300}$ ja $b = 100^{-300}$.

Tehtäväsarja B

B1. a) $x^2 - 27x + 114$
b) $x(x^2+1)(x+2)(x-5)$
c) $-2 \le x \le 3$

B2. a) $-3 < x < 0$ tai $x > 3$
b) $x < 0$
c) $x \le -4$ tai $0 \le x \le 4$

B3. $x = 3$

B4. 15 %

B5. a) $f(x) = -6x(x+1)(x-2)(x-3)$
b) $f(x) = -6(x+1)^2(x-2)^2$

B6. Tontin pinta-ala on 480 m^2.

B7. Kun $t = -1$, niin $x = 1$, ja kun $t = 3$, niin $x = -1$.

B8. Aitauksen pinta-ala on enimmillään 162 m^2.

B9. Enintään 33 autoa minuutissa.

B10. Vakiot ovat $a = 2$ ja $b = 16$. Lausekkeen supistettu muoto on $2x$. Lauseke on määritelty, kun $x \ne 2$ ja $x \ne 4$.

Hakemisto

alkuluku 27

binomi 7
binomin kuutio 20
binomin kuution muistikaava 20
binomin neliö 17
binomin neliön muistikaava 17

diskriminantti 75

ekvivalenssinuoli 86

geometrinen keskiarvo 48

jakojäännös 99
jakoyhtälö 99
jaoton polynomi 97
juuri $\sqrt[n]{a}$ 42

kaksoisjuuri 97
keskiverto 48
korkeamman asteen epäyhtälö 91
korkeamman asteen epäyhtälön ratkaiseminen 91
korkeamman asteen yhtälö 86
kultainen leikkaus 73
kuutiojuuri 43

luvun osoittaminen neliöjuureksi 35

monomi 7

n:s juuri 42
neliöjuuren määrittelyehto 29
neliöjuuri 28
neliön neliöjuuri 36
neliöyhtälön ratkaiseminen 31

osamäärä 99
osamäärän neliöjuuri 36

paraabeli 50
paraabelin huippu 50
Pascalin kolmio 22
polynomi 7
polynomien erotus 9
polynomien laskutoimituksia laskimella 13
polynomien summa 9
polynomien tulo 12
polynomifunktio 7
polynomin asteluku 7
polynomin muodostaminen nollakohtien avulla 101
polynomin nollakohtien ja tekijöiden yhteys 99
polynomin termi 7
polynomiyhtälön juurten lukumäärä 99
potenssifunktio 42
potenssiyhtälön ratkaiseminen 44
Pythagoraan luvut 61

ryhmittely 83

samanmuotoiset termit 8
summan ja erotuksen tulon muistikaava 24

tekijöihin jakaminen 25, 80
tekijöihin jakaminen laskimella 82
tekijöihin jakaminen nollakohtien avulla 97
termin asteluku 7
toisen asteen epäyhtälö 62
toisen asteen epäyhtälön ratkaiseminen 63
toisen asteen polynomifunktio 50
toisen asteen polynomin nollakohtien ja tekijöiden yhteys 97
toisen asteen yhtälö 52
toisen asteen yhtälön ratkaisukaava 56
trinomi 7
tulon neliöjuuri 36
tulon nollasääntö 86

vakiotermi 7
väli 52

yhteisen tekijän erottaminen 82

Valokuvien oikeudet

Kannen kuva:
Science Photo Library/MVphotos

s. 16 Marilyn Barbone/Fotolia
s. 22 Dunca Daniel/Panthermedia
s. 34 Fotolia
s. 49 Laura Reunanen/Sanoma Pro Oy
s. 56 Alamy/MVphotos
s. 67 Syda Productions/Fotolia
s. 68 Mostphotos
s. 69 V. Matthiesen/Panthermedia
s. 73 Xiongmao/Fotolia
s. 79 Fotolia
s. 88 vas. Alamy/MVphotos
s. 88 oik. Alfred Galois/©Rue des Archives/Tallandier/MVphotos

MAA2, vihjeet

Luku 1

11. Peräkkäisiä kokonaislukuja voit merkitä esimerkiksi x, $x + 1$, $x + 2$ jne.

18. Sievennä summan ja erotuksen lausekkeet.

21. Sijoita arvo muuttujalle x.

22. Sievennä polynomien summa. Jotta summa olisi nolla kaikilla muuttujan x arvoilla, on sen oltava muotoa $0x^2 + 0x + 0$.

23. Pura annettu yhtälö kahdeksi yhtälöksi. Sijoita näihin yhtälöihin annetusta yhtälöstä ratkaistun muuttujan lauseke.

24. Jokainen pariton luku on aina muotoa $2n + 1$.

25. Lukuun 5 päättyvä kokonaisluku voidaan kirjoittaa muotoon $10n + 5$, jossa n on jokin sopiva kokonaisluku.

35. Muodosta pinta-alan lauseke ja sen avulla yhtälö. Ratkaise yhtälö.

46. Sijoita x:n paikalle annettu arvo ja sievennä.

47. Sievennä ensin polynomin lauseke, jotta löydät 2. asteen termin.

48. Sievennä ensin polynomi, jotta löydät korkeimman asteen termin.

49. Muodosta pinta-alan lauseke ja sen avulla yhtälö. Ratkaise yhtälö.

50. Muodosta pinta-alan lauseke ja sen avulla yhtälö. Ole tarkkana, ettei mikään alue tule laskettua mukaan kahteen kertaan. Ratkaise yhtälö.

51. Taulukoi tiedot ja merkitse siihen alkuperäisten tietojen lisäksi vastaavat tiedot hinnasta ja myyntimäärästä, kun kimpun hintaa on korotettu x snt. Muodosta myyntitulon lauseke. Päättele miten löytyy suurin myyntitulo esimerkiksi piirtämällä kuvaaja geometriaohjelmalla. Totea laskemalla.

58. Käytä muistikaavaa apuna ja kirjoita riittävät välivaiheet näkyviin, jotta tunnistat muistikaavan termit.

59. Käytä muistikaavaa apuna ja tunnista muistikaavan termit. Muodosta tarvittaessa yksinkertainen yhtälö.

62. Muodosta pinta-alan lauseke ja sen avulla yhtälö. Ratkaise yhtälö.

63. Kahta peräkkäistä kokonaislukua voidaan merkitä esimerkiksi n ja $n + 1$. Muodosta ja ratkaise yhtälö.

69. Vertaa annettua polynomia binomin neliön muistikaavaan.

72. Hahmottele mallikuva ja muodosta maalauksen pinta-alalle lauseke.

73. Muodosta yhtälö kahden peräkkäisen parillisen luvun $2n$ ja $2(n+1)$ avulla. Ratkaise yhtälö.

74. a) Lukuun 5 päättyvä kokonaisluku voidaan kirjoittaa muotoon $10n + 5$, jossa n on jokin sopiva kokonaisluku. Korota luku potenssiin kaksi ja tulkitse saamasi vastaus.
b) etsi a-kohdan vinkkiin luku n.

75. Merkitse kokonaislukuja kirjaimilla ja sievennä tehtävänannon mukainen lauseke.

76. Pariton luku on aina muotoa $2n + 1$. Korota luku potenssiin 3 ja sievennä lauseke.

85. Käytä apuna summan ja erotuksen tulon muistikaavaa.

86. Jaa osoittaja ja nimittäjä ensin tekijöihin muistikaavan ja yhteisen tekijän avulla. Supista yhteiset tulontekijät.

87. Käytä apuna summan ja erotuksen tulon muistikaavaa.

95. Jaa osoittaja ja nimittäjä ensin tekijöihin. Supista vasta sitten.

96. Jaa osoittaja ja nimittäjä ensin tekijöihin. Supista vasta sitten.

97. Merkitse kokonaislukua kirjaimella ja muodosta lauseke. Jaa tekijöihin ja päättele vastaus.

Luku 2

107. Ratkaise yhtälö.

109. Merkitse sivun pituutta kirjaimella, muodosta yhtälö ja ratkaise se.

120. Merkitse a) neliön sivun pituutta b) ympyrän sädettä kirjaimella, muodosta yhtälö ja ratkaise se.

129. Aloita laskemalla lävistäjän lukujen tulo. Muodosta ja ratkaise sen jälkeen yhtälöt puuttuville vaaka- ja pystyriveille yksi kerrallaan.

140. Etene vaiheittain ja ole huolellinen sievennyksissä.

142. Sievennä juuret ensin.

143. Esitä luvut pelkkänä neliöjuurena, jolloin voit vertailla niitä.

147. Tarkista neliöjuuren määritelmä ja muista sen molemmat ehdot.

148. Käytä neliöjuuren määritelmää, annetun yhtälön oikea puoli on neliöjuuren arvo.

150. Käytä neliöjuuren määritelmää, annetun yhtälön oikea puoli on neliöjuuren arvo.

151. Voit piirtää kuvaajan myös geometriaohjelmalla.

155. Muodosta yleisen termin lauseke ja sen avulla yhtälö. Ratkaise.

156. Muodosta yleisen termin lausekkeen avulla yhtälö. Ratkaise.

157. Pääoma kasvaa vuodessa k-kertaiseksi. Selvitä ensin k ja sitten sen avulla korkoprosentti.

158. Hinta tulee kuukaudessa k-kertaiseksi. Selvitä ensin k ja sen jälkeen hinnan keskimääräinen muutoprosentti kuukaudessa.

163. Selvitä ensin yleisen termin lausekkeen avulla suhdeluku q ja käytä sen jälkeen geometrisen summan kaavaa.

164. Selvitä ensin suhdeluku termien a_{13} ja a_{20} avulla. Käytä sen jälkeen geometrisen summan kaavaa.

165. Väkiluku kasvaa vuodessa k-kertaiseksi. Selvitä ensin k ja sitten sen avulla keskimääräinen vuotuinen kasvuprosentti.

166. Radioaktiivisuus tulee vuodessa k-kertaiseksi. Selvitä ensin k ja laske sen avulla aktiivisuus haluttuna ajankohtana.

Luku 3

T176
Aseta parametrille liukusäädin geometriaohjelmassa.

T180
b) Kuinka paljon auto ylittää keskilinjan sivusuunnassa ajaessaan keskellä tietä? Ratkaise, riittääkö tunnelin korkeus kyseisessä kohdassa.

T185
Aseta parametrille liukusäädin geometriaohjelmassa.

T193
Muodosta yhtälö $f(-3) = 6$.

T202
Jos luku x on parillinen luku, niin luvut $x - 1$ ja $x + 1$ ovat kaksi peräkkäistä paritonta lukua.

T204
Muodosta yhtälö $f(-1) = 0$.

T215
Neliöjuuri on määritelty vain epänegatiivisille luvuille.

T220
Kaksoisepäyhtälö molemmat epäyhtälöt pitää olla voimassa. Ratkaiset ensin epäyhtälöt erikseen.

T221
Neliöjuuri on määritelty vain epänegatiivisille luvuille. Luvulla nolla ei voi jakaa.

T224
Selvitä ensin millä aikavälillä pallo on yli 5,0 m korkeudessa.

T225
Muista tehdä yksikönmuunnos, 1 litra = 1 dm^3.

T233
Mieti miten seuraava kolmioluku määräytyy edellisen avulla.

T240
Aritmeettisessa jonossa seuraava jäsen on aina yhtä paljon edellistä isompi tai pienempi.

T241
Mieti miten kuusikulmioluku eroaa aina edellisestä luvusta.

T245

Kymmenjärjestelmän luvussa AB luku B kertoo ykkösten määrän ja luku A kymmenien määrän.

T253
Mieti kuinka monta nollakohtaa funktiolla voi olla.

T259
Mieti minkä yhtälön ratkaisuna saisit ne muuttujan x arvot, joilla funktio saa halutun arvon.

T261
Muodosta yhtälö, jonka ratkaisuna saat yhteisen pisteen x-koordinaatin.

T264
Luvulla nolla ei voi jakaa.

Luku 4

T275
a) Jaa keskimmäinen termi niin, että saat yhteiseksi tekijäksi binomin $x - 7$.
b) Jaa keskimmäinen termi niin, että saat yhteiseksi tekijäksi binomin $y + 2$.
c) Jaa keskimmäinen termi niin, että saat yhteiseksi tekijäksi binomin $z - 1$.

T279
Vain tulomuodosta voi supistaa. Jaa ensin osoittaja ja nimittäjä tekijöihin.

T283
Erota ensin yhteinen tekijä ja käytä sitten ryhmittelyä.

T286
Muokkaa lukujen erotusta ja tunnista binomin neliö.

T296
Toisen asteen yhtälön juurien lukumäärä selviää diskriminantin arvosta.

T304
Merkitse ensimmäistä lukua kirjaimella x. Mitkä ovat seuraavat kaksi kokonaislukua kirjaimen x avulla lausuttuna?

T305
a) Aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenien erotus on vakio.
b) Geometrisen jonon peräkkäisten jäsenien suhde on vakio.

T306
Muodosta lukujonon 4 ensimmäisen jäsenen lausekkeet.

T325
Siirrä oikean puolen lauseke vasemmalle puolelle ja erota yhteinen tekijä.

T326
Sijoita $x^2 = t$.

T344
Mikäli toisen asteen yhtälöllä on vain yksi juuri, kutsutaan sitä kaksoisjuureksi.

T349
Käytä hyväksi juurten summan ja tulon kaavoja sivun 98 marginaalista.

1

Monomi on muotoa ax^n , jossa $a \in R$ ja $n \in \{1, 2, 3, 4, ...\}$.
Polynomi on monomien summa.

a) $3x^4$ on polynomi

b) $a - 6$ on polynomi

c) $x^4 - 11x + \frac{3}{x}$ ei ole polynomi, koska termin $\frac{3}{x} = 3x^{-1}$ asteluku ei ole positiivinen kokonaisluku.

d) $7a^5 - 4a + 1$ on polynomi.

Vastaus a, b ja d

2

$2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x + 1$

a) Polynomin asteluku on korkeimman termin asteluku eli 4.

b) Toisen asteen termi on $4x^2$.

c) Ensimmäisen asteen termi on $-x$, joten sen kerroin on -1.

d) Vakiotermi on 1.

Vastaus

a) 4
b) $4x^2$
c) -1
d) 1

3

Kolmannen asteen polynomi on muotoa $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Kolmannen asteen termin kerroin $a = 2$,
toisen asteen termin kerroin $b = 1$,
ensimmäisen asteen termin kerroin $c = -3$ ja
vakiotermi $d = 7$.

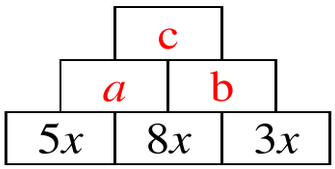
Kysytty polynomi on siis

$$2x^3 + x^2 - 3x + 7$$

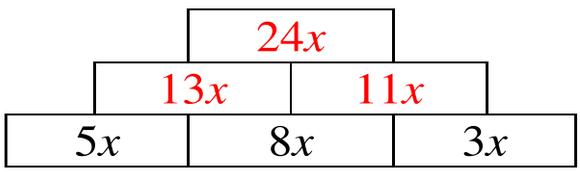
Vastaus $2x^3 + x^2 - 3x + 7$

4

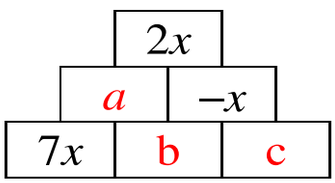
a)



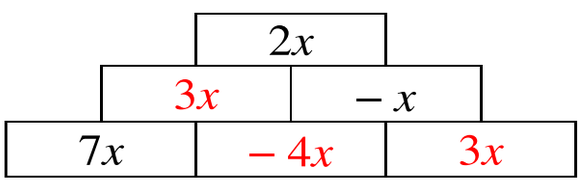
$a = 5x + 8x = 13x$
$b = 8x + 3x = 11x$
$c = a + b = 13x + 11x = 24x$



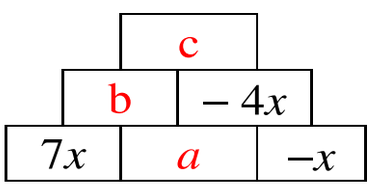
b)



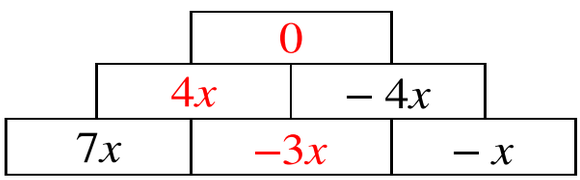
$a + (-x) = 2x$, joten $a = 2x + x = 3x$
$7x + b = a$, joten $b = a - 7x = 3x - 7x = -4x$
$b + c = -x$, joten $c = -x - b = -x - (-4x) = 3x$



c)



$a + (-x) = -4x$, joten $a = -4x + x = -3x$
$b = a + 7x = -3x + 7x = 4x$
$c = b + (-4x) = 4x - 4x = 0$



5

$f(x) = 2x^2 - 5x - 12$

a) $f(3) = 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 12 = 2 \cdot 9 - 15 - 12 = -9$

b) $f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 12 = 2 + 5 - 12 = -5$

c) $f(4) = 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 - 12 = 2 \cdot 16 - 20 - 12 = 0$

Vastaus

a) $f(3) = -9$

b) $f(-1) = -5$

c) $f(4) = 0$

6

a) $2x^2 + 4x + 3x^2 + 6 = 2x^2 + 3x^2 + 4x + 6$

$$= 5x^2 + 4x + 6$$

b) $6x^2 - 7x + 8x - 5x^2 + 2 = 6x^2 - 5x^2 - 7x + 8x + 2$

$$= x^2 + x + 2$$

Vastaus a) $5x^2 + 4x + 6$

b) $x^2 + x + 2$

7

a) $(3x^2 + 4x - 7) + (-x^2 + 8) = 3x^2 + 4x - 7 - x^2 + 8$

$= 3x^2 - x^2 + 4x - 7 + 8$

$= 2x^2 + 4x + 1$

b) $(4x + 3) - (-3x - 5) = 4x + 3 + 3x + 5$

$= 4x + 3x + 3 + 5$

$= 7x + 8$

Vastaus a) $2x^2 + 4x + 1$

b) $7x + 8$

8

$P(x) = -x^2 + 2x - 4$, $x = 1\frac{3}{4}$

a) $P(x) + Q(x) = (-x^2 + 2x - 4) + (3 - 2x + x^2)$

$= -x^2 + 2x - 4 + 3 - 2x + x^2$

$= -x^2 + x^2 + 2x - 2x - 4 + 3$

$= -1$

b) $P(x) - Q(x) = (-x^2 + 2x - 4) - (3 - 2x + x^2)$

$= -x^2 + 2x - 4 - 3 + 2x - x^2$

$= -x^2 - x^2 + 2x + 2x - 4 - 3$

$= -2x^2 + 4x - 7$

Vastaus a) -1

b) $-2x^2 + 4x - 7$

9

a) $3x-(1-2x)=x-6$

$$3x-1+2x=x-6$$

$$5x-x=-6+1$$

$$4x=-5 \qquad |:4$$

$$x=-\frac{5}{4}$$

$$x=-1\frac{1}{4}$$

b) $6-2x+4=8x-(2x+4)$

$$-2x+10=8x-2x-4$$

$$-2x-8x+2x=-4-10$$

$$-8x=-14 \qquad |:(-8)$$

$$x=\frac{-14}{-8}$$

$$x=1\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{8}_{4}}$$

$$x=1\frac{3}{4}$$

Vastaus a) $x=-1\frac{1}{4}$ b) $x=1\frac{3}{4}$

10

Polynomit P ja Q saavat saman arvon kaikilla muuttujan x arvoilla, mikäli niiden termit ovat täsmälleen samat.

$$P(x) = Q(x)$$

$$ax + 3x - 2 = x - 2$$

$$(a + 3)x - 2 = x - 2$$

$$(a + 3)x = x$$

$$(a + 3)x = 1x$$

On oltava $(a + 3)x = 1x$ kaikilla arvoilla $x \in R$, joten saadaan yhtälö

$$a + 3 = 1$$

$$a = 1 - 3$$

$$a = -2$$

Vastaus $a = -2$

Tapa 2

$$P(x) = Q(x)$$

$$ax + 3x - 2 = x - 2$$

$$ax + 3x - x = -2 + 2$$

$$ax + 2x = 0$$

$$(a + 2)x = 0$$

Saadussa yhtälössä vasemman ja oikean puolen on oltava yhtä suuret kaikilla muuttujan x arvoilla.
Siis on oltava

$$a + 2 = 0$$

$$a = -2$$

Vastaus $a = -2$

11

Väite:
Viiden peräkkäisen kokonaisluvun summa on viisi kertaa keskimmäinen luku.

Todistus:
Merkitään kokonaisluvuista pienintä kirjaimella n.
Tutkittavat luvut ovat tällöin n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ ja $n + 4$.

Lukujen summa on

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4)$$

$$= n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4$$

$$= 5n + 10$$

$$= 5(n + 2)$$

jossa $n + 2$ on tutkittavista luvuista keskimmäinen.

Siis väite on tosi. □

12

a) $3x^8 - 7x$ on muuttujan x polynomi, koska kaikkien termien asteluku on positiivinen kokonaisluku.

b) $x^2 - ax + \sqrt{x}$ ei ole muuttujan x polynomi, koska viimeisen termin asteluku ei ole positiivinen kokonaisluku.

c) $x^3 + 5x + x^{-3}$ ei ole muuttujan x polynomi, koska viimeisen termin asteluku ei ole positiivinen kokonaisluku.

d) $ax^3 - ax + \sqrt{a}$ on muuttujan x polynomi, koska kaikkien termien asteluku on positiivinen kokonaisluku. Luvut a ja $\sqrt{a}$ ovat reaalisia vakioita, $a \geq 0$.

Vastaus a ja d

13

$P(x) = -x^5 - 6x^4 + x^2 - 3$

a) Polynomin asteluku on korkeimman asteen termin asteluku eli 5.

b) Toisen asteen termi on x^2.

c) Kolmannen asteen termiä ei ole näkyvissä, joten sen on oltava $0x^3$. Sen kerroin on 0 (nolla).

d) Vakiotermi on -3.

Vastaus a) 5
b) x^2
c) 0
d) -3

14

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 1$

$$f(-3) = \frac{2}{3} \cdot (-3)^2 + 1 = \frac{2}{3} \cdot 9 + 1 = \frac{2 \cdot \overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} + 1 = 6 + 1 = 7$$

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$

$$f(-3) = -(-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 5 = -9 + 6 + 5 = 2$$

c) $f(x) = 2$

$$f(-3) = 2$$

Vastaus a) 7
b) 2
c) 2

15

Toisen asteen polynomi on muotoa $Q(x) = 3x^2 - x + 4$.

Ensimmäisen asteen termin kerroin

$P(x) + Q(x) = (3x^2 + x) + (3x^2 - x + 4)$ ja vakiotermi

$$= 3x^2 + x + 3x^2 - x + 4$$

$$= 3x^2 + 3x^2 + x - x + 4$$

$$= 6x^2 + 4$$

$P(x) - Q(x) = (3x^2 + x) - (3x^2 - x + 4)$.

$$= 3x^2 + x - 3x^2 + x - 4$$

$$= 3x^2 - 3x^2 + x + x - 4$$

$$= 2x - 4$$

Polynomi saa arvon 6, kun muuttuja x saa arvon -1 eli $P(-1) = 6$.

Saadaan

$$P(x) = ax^2 - 3x + 7$$

$$P(-1) = a \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 7$$

Ratkaistaan tuntematon kerroin a yhtälöstä $P(-1) = 6$.

$$a \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 7 = 6$$

$$a + 3 + 7 = 6$$

$$a = 6 - 10$$

$$a = -4$$

Kysytty polynomi on $P(x) = -4x^2 - 3x + 7$.

Vastaus $-4x^2 - 3x + 7$

16

a) $(5x^2 - 4x) + (3x^2 - 2x + 8) = 5x^2 - 4x + 3x^2 - 2x + 8$

$= 5x^2 + 3x^2 - 4x - 2x + 8$

$= 8x^2 - 6x + 8$

b) $(x^3 - 7x^2) - (-4x^3 + 2x^2 - 1) = x^3 - 7x^2 + 4x^3 - 2x^2 + 1$

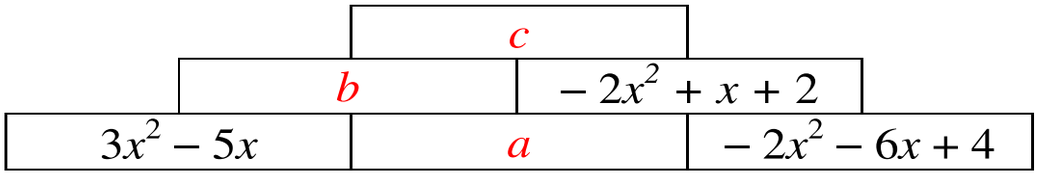
$= x^3 + 4x^3 - 7x^2 - 2x^2 + 1$

$= 5x^3 - 9x^2 + 1$

Vastaus a) $8x^2 - 6x + 8$

b) $5x^3 - 9x^2 + 1$

17

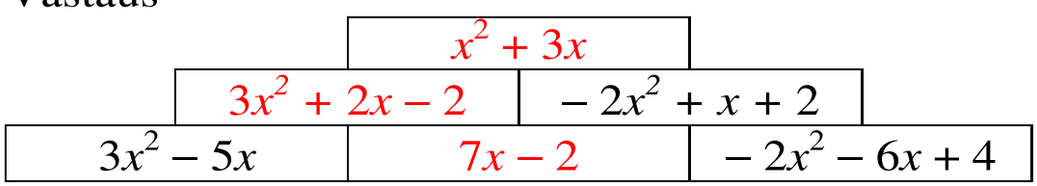


$$a + (-2x^2 - 6x + 4) = -2x^2 + x + 2$$
$$a = -2x^2 + x + 2 - (-2x^2 - 6x + 4)$$
$$= -2x^2 + x + 2 + 2x^2 + 6x - 4$$
$$= -2x^2 + 2x^2 + x + 6x + 2 - 4$$
$$= 7x - 2$$

$$b = (3x^2 - 5x) + a$$
$$= 3x^2 - 5x + 7x - 2$$
$$= 3x^2 + 2x - 2$$

$$c = b + (-2x^2 + x + 2)$$
$$= (3x^2 + 2x - 2) + (-2x^2 + x + 2)$$
$$= 3x^2 + 2x - 2 - 2x^2 + x + 2$$
$$= 3x^2 - 2x^2 + 2x + x - 2 + 2$$
$$= x^2 + 3x$$

Vastaus



18

$P(x) = 3x^2 + x$, $Q(x) = 3x^2 - x + 4$

a) $P(x) + Q(x) = (3x^2 + x) + (3x^2 - x + 4)$

$= 3x^2 + x + 3x^2 - x + 4$

$= 3x^2 + 3x^2 + x - x + 4$

$= 6x^2 + 4$

Siis polynomin $P + Q$ asteluku on 2.

b) $P(x) - Q(x) = (3x^2 + x) - (3x^2 - x + 4)$

$= 3x^2 + x - 3x^2 + x - 4$

$= 3x^2 - 3x^2 + x + x - 4$

$= 2x - 4$

Siis polynomin $P - Q$ asteluku on 1.

19

Lasketaan polynomien $-5x^2 + 7x$ ja $-4x^2 + 8x - 3$ erotus ja nimetään se polynomiksi P.

$$\begin{aligned} P(x) &= (-5x^2 + 7x) - (-4x^2 + 8x - 3) \\ &= -5x^2 + 7x + 4x^2 - 8x + 3 \\ &= -5x^2 + 4x^2 + 7x - 8x + 3 \\ &= -x^2 - x + 3 \end{aligned}$$

$$P(-3) = -(-3)^2 - (-3) + 3 = -9 + 3 + 3 = -3$$

Vastaus Polynomien erotus on $-x^2 - x + 3$.
Erotuksen arvo on -3, kun $x = -3$.

20

a)
$$x-\frac{2x-5}{3}=\frac{2-x}{2} \qquad \left|\cdot 6\right.$$

$$6x-\cancel{6}^{2}\cdot\frac{2x-5}{\cancel{3}}=\cancel{6}^{3}\cdot\frac{2-x}{\cancel{2}}$$

$$6x-2\cdot(2x-5)=3\cdot(2-x)$$

$$6x-4x+10=6-3x$$

$$2x+3x=6-10$$

$$5x=-4 \qquad \left|:5\right.$$

$$x=-\frac{4}{5}$$

b) $$\frac{3x-4}{2}-\frac{2x+7}{4}=1+\frac{x}{3} \qquad \Big| \cdot 12$$

$$\cancel{12}^{6}\cdot\frac{3x-4}{\cancel{2}}-\cancel{12}^{3}\cdot\frac{2x+7}{\cancel{4}}=12\cdot 1+\cancel{12}^{4}\cdot\frac{x}{\cancel{3}}$$

$$6(3x-4)-3(2x+7)=12+4x$$

$$18x-24-6x-21=12+4x$$

$$12x-4x=12+24+21$$

$$8x=57 \qquad \Big| : 8$$

$$x=\frac{57}{8}$$

$$x=7\frac{1}{8}$$

Vastaus a) $x=-\frac{4}{5}$ b) $x=7\frac{1}{8}$

21

Sievennetään ensin annettu yhtälö ja sijoitetaan sievennettyyn muotoon tiedetty ratkaisu $x = -2$. Ratkaistaan tämän jälkeen kysytty vakio a.

$$\frac{x-3a}{2} - \frac{a-2x^2}{3} - \frac{a}{2} = \frac{15x^2-2x-6}{6} \qquad \Big| \cdot 6$$

$$\cancel{6}^{3} \cdot \frac{x-3a}{\cancel{2}} - \cancel{6}^{2} \cdot \frac{a-2x^2}{\cancel{3}} - \cancel{6}^{3} \cdot \frac{a}{\cancel{2}} = \cancel{6} \cdot \frac{15x^2-2x-6}{\cancel{6}}$$

$$3 \cdot (x-3a) - 2(a-2x^2) - 3a = 15x^2 - 2x - 6$$

$$3x - 9a - 2a + 4x^2 - 3a = 15x^2 - 2x - 6$$

$$-14a = 15x^2 - 4x^2 - 2x - 3x - 6$$

$$-14a = 11x^2 - 5x - 6 \qquad \Big| \, x = -2$$

$$-14a = 11 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) - 6$$

$$-14a = 44 + 10 - 6$$

$$-14a = 48 \qquad \Big| : (-14)$$

$$a = -\frac{48}{14}$$

$$a = -3\frac{6}{14} = -3\frac{3}{7}$$

Vastaus $\quad a = -3\frac{3}{7}$

22

$P(x) = 5x^2 - ax + 4 - (bx^2 - 7x + 3)$

$Q(x) = 8x^2 + x + c$

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= \left(5x^2 - ax + 4 - (bx^2 - 7x + 3)\right) + (8x^2 + x + c) \\ &= 5x^2 - ax + 4 - bx^2 + 7x - 3 + 8x^2 + x + c \\ &= 5x^2 - bx^2 + 8x^2 - ax + 7x + x + 4 - 3 + c \\ &= 13x^2 - bx^2 - ax + 8x + 1 + c \\ &= (13 - b)x^2 + (-a + 8)x + (1 + c) \end{aligned}$$

Polynomi $P + Q$ on nolla kaikilla muuttujan x arvoilla täsmälleen, kun polynomin $P + Q$ kaikkien termien kertoimet ja vakiotermi ovat nollia eli $P(x) + Q(x) = 0x^2 + 0x + 0$. Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 13 - b = 0 \\ -a + 8 = 0 \\ 1 + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 13 \\ a = 8 \\ c = -1 \end{cases}$$

Vastaus $a = 8$, $b = 13$ ja $c = -1$

23

$b-a=c-b=3$, joten saadaan yhtälöt

$$b-a=3 \quad \text{ja} \quad c-b=3$$

$$a=b-3 \quad \text{ja} \quad c=b+3$$

a) $3a-b=11$

$$b=3a-11$$

Sijoitetaan tämä alkuperäisiin yhtälöihin ja ratkaistaan a ja c.

$$a=b-3 \qquad c=b+3 \qquad \big| \; b=3a-11$$

$$a=3a-11-3 \qquad c=3a-11+3 \qquad \big| \; a=7$$

$$a-3a=-14 \qquad c=3\cdot 7-8$$

$$-2a=-14 \qquad c=13$$

$$a=7$$

Ratkaistaan b yhtälöstä $b=3a-11$ sijoittamalla $a=7$.

$$b=3a-11 \qquad \big| \; a=7$$

$$=3\cdot 7-11$$

$$=10$$

b) $3a - c = 5$

$c = 3a - 5$

Sijoitetaan tämä yhtälöön $c = b + 3$ ja ratkaistaan b.

$c = b + 3 \quad \big| \; c = 3a - 5$

$3a - 5 = b + 3$

$b = 3a - 8 \quad \big| \text{ sijoitetaan } a = b - 3$

$b = 3 \cdot (b - 3) - 8$

$b = 3b - 9 - 8$

$-2b = -17 \quad \big| : (-2)$

$b = 8\frac{1}{2}$

$a = b - 3 = 8\frac{1}{2} - 3 = 5\frac{1}{2}$

$c = b + 3 = 8\frac{1}{2} + 3 = 11\frac{1}{2}$

Vastaus a) $a = 7, \;\; b = 10, \;\; c = 13$

b) $a = 5\frac{1}{2}, \;\; b = 8\frac{1}{2}, \;\; c = 11\frac{1}{2}$

24

Tutkitaan parittomia lukuja $2n+1$ ja $2m+1$, joissa $n, m \in Z$.

a) $$(2n+1)+(2m+1) = 2n+1+2m+1$$
$$= 2n+2m+2$$
$$= 2(n+m+1)$$

Koska $n+m+1 \in Z$, niin saatu summa on parillinen. □

b) $$(2n+1)-(2m+1) = 2n+1-2m-1$$
$$= 2n-2m+1-1$$
$$= 2(n-m)$$

Koska $n-m \in Z$, niin saatu erotus on parillinen. □

25

Kokonaisluku, joka päättyy numeroon 5, voidaan aina esittää muodossa $10n+5$, jossa $n \in Z$.

Tutkitaan numeroon 5 päättyviä kokonaislukuja $10n+5$ ja $10m+5$, joissa $n,\ m \in Z$.

$$\begin{aligned}(10n+5)+(10m+5) &= 10n+5+10m+5 \\ &= 10n+10m+10 \\ &= 10(n+m+1)\end{aligned}$$

Koska luku $n+m+1 \in Z$, niin saatu kokonaisluku $10(n+m+1)$ on jaollinen kymmenellä eli päättyy numeroon nolla. □

26

a) $x \cdot 3x = 3x^2$

b) $-2x^2 \cdot 3x^4 = -2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot x^4 = -6x^{2+4} = -6x^6$

c) $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 = x^{1+2+3+4} = x^{10}$

Vastaus a) $3x^2$

b) $-6x^6$

c) x^{10}

27

a) $x(3x-4) = x \cdot 3x - x \cdot 4 = 3x^2 - 4x$

b) $-2t(5t-3) = -2t \cdot 5t - (-2t) \cdot 3 = -10t^2 + 6t$

Vastaus a) $3x^2 - 4x$

b) $-10t^2 + 6t$

28

a) $2a^3(4a^2 - 3a + 1) = 2a^3 \cdot 4a^2 - 2a^3 \cdot 3a + 2a^3 \cdot 1 = 8a^5 - 6a^4 + 2a^3$

b) $-x^2(-x^2 + 3x - 4) = -x^2 \cdot (-x^2) + (-x^2) \cdot 3x - (-x^2) \cdot 4$

$= x^4 - 3x^3 + 4x^2$

Vastaus a) $8a^5 - 6a^4 + 2a^3$

b) $x^4 - 3x^3 + 4x^2$

29

a) $(x+3)(5x+7) = x \cdot 5x + x \cdot 7 + 3 \cdot 5x + 3 \cdot 7$

$= 5x^2 + 7x + 15x + 21$

$= 5x^2 + 22x + 21$

b) $(2a-4)(3a+1) = 2a \cdot 3a + 2a \cdot 1 - 4 \cdot 3a - 4 \cdot 1$

$= 6a^2 + 2a - 12a - 4$

$= 6a^2 - 10a - 4$

Vastaus a) $5x^2 + 22x + 21$

b) $6a^2 - 10a - 4$

30

a) $(x^2-3)(4x-2) = x^2 \cdot 4x + x^2 \cdot (-2) - 3 \cdot 4x - 3 \cdot (-2)$

$= 4x^3 - 2x^2 - 12x + 6$

b) $(-6x^2+2x)(4x-3) = -6x^2 \cdot 4x - 6x^2 \cdot (-3) + 2x \cdot 4x + 2x \cdot (-3)$

$= -24x^3 + 18x^2 + 8x^2 - 6x$

$= -24x^3 + 26x^2 - 6x$

Vastaus a) $4x^3 - 2x^2 - 12x + 6$

b) $-24x^3 + 26x^2 - 6x$

31

a) $(x+5)(x-5) = x \cdot x + x \cdot (-5) + 5 \cdot x + 5 \cdot (-5)$

$= x^2 - 5x + 5x - 5^2$

$= x^2 - 5^2$

$= x^2 - 25$

b) $(2x+3)^2 = (2x+3)(2x+3)$

$= 2x \cdot 2x + 2x \cdot 3 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 3$

$= 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x + 6x + 6x + 3$

$= 4x^2 + 12x + 9$

Vastaus a) $(x+5)(x-5) = x^2 - 25$

b) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

32

a) $3x - 2(x - 5) = 3x - 2 \cdot x - 2 \cdot (-5)$

$= 3x - 2x + 10$

$= x - 10$

b) $5(2x + 4) - 6(3x - 5) = 5 \cdot 2x + 5 \cdot 4 - 6 \cdot 3x - 6 \cdot (-5)$

$= 10x + 20 - 18x + 30$

$= -8x + 50$

Vastaus a) $x - 10$

b) $-8x + 50$

33

a) $p(x) = (x+4)(x-4)$

$p(-5) = (-5+4)(-5-4) = (-1)\cdot(-9) = 9$

b) $p(x) = 2x^2 - (x+2)(x-2)$

$p(-5) = 2\cdot(-5)^2 - (-5+2)(-5-2)$

$= 2\cdot 25 - (-3)\cdot(-7)$

$= 50 - 21$

$= 29$

Vastaus a) $p(-5) = 9$

b) $p(-5) = 29$

34

$P(x) = 3x^2 - 5x, \quad Q(x) = 2x^2 - 4x + 2$

a) $xP(x) = x(3x^2 - 5x)$

$= x \cdot 3x^2 + x \cdot (-5x)$

$= 3x^3 - 5x^2$

b) $2xP(x) - 3xQ(x)$

$= 2x(3x^2 - 5x) - 3x(2x^2 - 4x + 2)$

$= 2x \cdot 3x^2 + 2x \cdot (-5x) - 3x \cdot 2x^2 - 3x \cdot (-4x) - 3x \cdot 2$

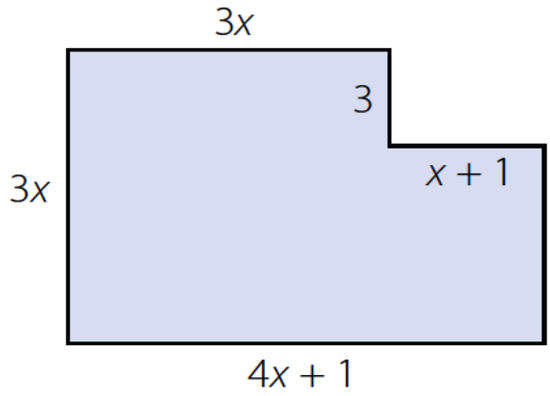
$= 6x^3 - 10x^2 - 6x^3 + 12x^2 - 6x$

$= 2x^2 - 6x$

Vastaus a) $3x^3 - 5x^2$

b) $2x^2 - 6x$

35



Kuvion pinta-ala on

$$A = 3x \cdot (4x + 1) - 3(x + 1) = 3x \cdot 4x + 3x \cdot 1 - 3x - 3 = 12x^2 - 3$$

Toisaalta tiedetään, että $A = 45$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$12x^2 - 3 = 45$$

$$12x^2 = 45 + 3$$

$$x^2 = \frac{48}{12}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

Oltava $x > 0$, joten $x = 2$.

Vastaus $x = 2$

36

a) $3a^2 \cdot 5a^3 = 3 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a^3 = 15a^{2+3} = 15a^5$

b) $(-4a^4) \cdot (-5a^3) = -4 \cdot (-5) \cdot a^4 \cdot a^3 = 20a^{4+3} = 20a^7$

Vastaus a) $15a^5$

b) $20a^7$

37

a) $4x^2(5x^2 - 6x + 2) = 4x^2 \cdot 5x^2 + 4x^2 \cdot (-6x) + 4x^2 \cdot 2$

$$= 20x^4 - 24x^3 + 8x^2$$

b) $-3x(2x^3 + 5x - 4) = -3x \cdot 2x^3 - 3x \cdot 5x - 3x \cdot (-4)$

$$= -6x^4 - 15x^2 + 12x$$

Vastaus a) $20x^4 - 24x^3 + 8x^2$

b) $-6x^4 - 15x^2 + 12x$

38

a) $5x^2 - (-2x) \cdot (3x - 4)$

$= 5x^2 + 2x \cdot 3x + 2x \cdot (-4)$

$= 5x^2 + 6x^2 - 8x$

$= 11x^2 - 8x$

b) $2x \cdot (7x - 3) - (-4x) \cdot (-6x + 5)$

$= 2x \cdot 7x + 2x \cdot (-3) + 4x \cdot (-6x) + 4x \cdot 5$

$= 14x^2 - 6x - 24x^2 + 20x$

$= -10x^2 + 14x$

Vastaus a) $5x^2 - (-2x) \cdot (3x - 4) = 11x^2 - 8x$

b) $2x \cdot (7x - 3) - (-4x) \cdot (-6x + 5) = -10x^2 + 14x$

39

a) $6t^2 - 3t^2 \cdot (2t - 4)$

$= 6t^2 - 3t^2 \cdot 2t - 3t^2 \cdot (-4)$

$= 6t^2 - 6t^3 + 12t^2$

$= 18t^2 - 6t^3$

$= -6t^3 + 18t^2$

b) $4t^3 - t^2 + 2t(t^2 - 2t + 3)$

$= 4t^3 - t^2 + 2t \cdot t^2 + 2t \cdot (-2t) + 2t \cdot 3$

$= 4t^3 - t^2 + 2t^3 - 4t^2 + 6t$

$= 6t^3 - 5t^2 + 6t$

Vastaus a) $-6t^3 + 18t^2$

b) $6t^3 - 5t^2 + 6t$

40

a) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3}x\cdot\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$

$$=\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}x^2-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}x+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}x-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{12}x+\frac{5}{12}x-\frac{5}{24}$$

$$=\frac{1}{3}x^2+\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{4}{\cancel{12}}}x-\frac{5}{24}$$

$$=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{5}{24}$$

b) $(7+x)(x-7)=7x-7^2+x^2-7x=x^2-49$

Vastaus a) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{5}{24}$

b) $(7+x)(x-7)=x^2-49$

41

$$\big((3x^2-5x)+(-x+4)\big)\big(2x+4\big)$$

$$=\big(3x^2-5x-x+4\big)\big(2x+4\big)$$

$$=\big(3x^2-6x+4\big)\big(2x+4\big)$$

$$=3x^2\cdot 2x+3x^2\cdot 4-6x\cdot 2x-6x\cdot 4+4\cdot 2x+4\cdot 4$$

$$=6x^3+12x^2-12x^2-24x+8x+16$$

$$=6x^3-16x+16$$

Vastaus $6x^3-16x+16$

42

a) $(3x-4)^2 = (3x-4)(3x-4)$

$= (3x)^2 + 3x \cdot (-4) - 4 \cdot 3x + 4^2$

$= 9x^2 - 12x - 12x + 16$

$= 9x^2 - 24x + 16$

b) $(-2x^2+1)^2 = (-2x^2+1)(-2x^2+1)$

$= (-2x^2)^2 - 2x^2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2x^2) + 1^2$

$= 4x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 1$

$= 4x^4 - 4x^2 + 1$

c) $(x^3+2)^2 = (x^3+2)(x^3+2)$

$= (x^3)^2 + x^3 \cdot 2 + 2 \cdot x^3 + 2^2$

$= x^6 + 4x^3 + 4$

Vastaus a) $9x^2 - 24x + 16$
b) $4x^4 - 4x^2 + 1$
c) $x^6 + 4x^3 + 4$

43

$$
\begin{aligned}
(2x+1)(4x-2)(4x^2+1) &= \big(2x\cdot 4x + 2x\cdot(-2) + 1\cdot 4x + 1\cdot(-2)\big)(4x^2+1) \\
&= (8x^2-2)(4x^2+1) \\
&= 8x^2\cdot 4x^2 + 8x^2\cdot 1 - 2\cdot 4x^2 - 2\cdot 1 \\
&= 32x^4 - 2
\end{aligned}
$$

Vastaus $32x^4 - 2$

44

a) $\frac{\cancel{3x}\,(x+1)}{\cancel{3x}} = x+1$

b) $\frac{4x^2-8x}{4x} = \frac{\cancel{4x}\,(x-2)}{\cancel{4x}} = x-2$

c) $\frac{\overset{1}{\cancel{5}}\,x^2\,\cancel{(1-2x)}}{\underset{2}{\cancel{10}}\,\cancel{(1-2x)}} = \frac{x^2}{2}$

d) $\frac{3x-6x^3}{9-18x^2} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}\,x\,\cancel{(1-2x^2)}}{\underset{3}{\cancel{9}}\,\cancel{(1-2x^2)}} = \frac{x}{3}$

Vastaus

a) $x+1$

b) $x-2$

c) $\frac{x^2}{2}$

d) $\frac{x}{3}$

45

a) $4x(3x-2)-5x(2x-4)=2x^2+7$

$$12x^2-8x-10x^2+20x=2x^2+7$$

$$2x^2+12x=2x^2+7$$

$$2x^2-2x^2+12x=7$$

$$12x=7 \qquad |:12$$

$$x=\frac{7}{12}$$

b) $8x^2-(2x+3)(4x-5)=1$

$$8x^2-(8x^2-10x+12x-15)=1$$

$$8x^2-8x^2+10x-12x+15=1$$

$$-2x=1-15 \qquad |:(-2)$$

$$x=\frac{-14}{-2}$$

$$x=7$$

Vastaus a) $x=\frac{7}{12}$

b) $x=7$

46

a) $p(x) = (2x^2 - 5)(x^2 + 1)$

$$p(-1) = \left(2 \cdot (-1)^2 - 5\right)\left((-1)^2 + 1\right)$$
$$= (2 - 5)(1 + 1)$$
$$= -3 \cdot 2$$
$$= -6$$

b) $p(x) = (2x^3 + 3x^2 - 1)(4x - 6)$

$$p(-1) = \left(2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 1\right)\left(4 \cdot (-1) - 6\right)$$
$$= \left(2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 - 1\right)(-4 - 6)$$
$$= (-2 + 3 - 1)(-10)$$
$$= 0 \cdot (-10)$$
$$= 0$$

Vastaus a) $p(-1) = -6$
b) $p(-1) = 0$

47

Puretaan sulut ja selvitetään polynomin toisen asteen termi.

$$(3x^2 + ax - 4)(-2x^2 - 5x + 1)$$

$$= 3x^2 \cdot (-2x^2) + 3x^2 \cdot (-5x) + 3x^2 \cdot 1$$

$$+ ax \cdot (-2x^2) + ax \cdot (-5x) + ax \cdot 1$$

$$-4 \cdot (-2x^2) - 4 \cdot (-5x) - 4 \cdot 1$$

$$= -6x^4 - 15x^3 + 3x^2 - 2ax^3 - 5ax^2 + ax + 8x^2 + 20x - 4$$

$$= -6x^4 - 15x^3 - 2ax^3 + 11x^2 - 5ax^2 + ax + 20x - 4$$

Toisen asteen termi on $11x^2 - 5ax^2 = (11 - 5a)x^2$, jonka kertoimen on oltava 6. Muodostetaan yhtälö.

$$11 - 5a = 6$$

$$-5a = 6 - 11 \qquad \big| _(-5)$$

$$a = \frac{-5}{-5}$$

$$a = 1$$

Vastaus $a = 1$

48

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ ja $Q(x) = 2x^4 + 6x^3$

Muodostetaan vaadittu polynomi ja sievennetään sen lauseke, jotta saadaan selville korkeimman asteen termi.

$$(2x^2 - 1)P(x) - xQ(x)$$

$$= (2x^2 - 1)(x^3 - 4x^2 + 3) - x(2x^4 + 6x^3)$$

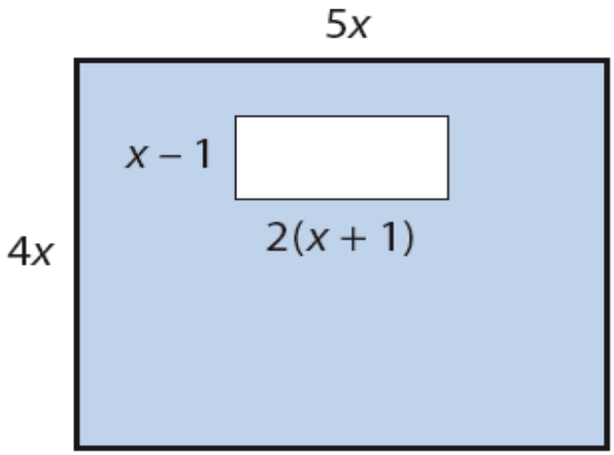
$$= 2x^5 - 8x^4 + 6x^2 - x^3 + 4x^2 - 3 - 2x^5 - 6x^4$$

$$= -14x^4 - x^3 + 10x^2 - 3$$

Polynomin asteluku on korkeimman asteen termin $-14x^4$ asteluku 4.

Vastaus 4

49



Lasketaan väritetyn osan pinta-ala vähentämällä koko suorakulmion alasta värittämättömän pikkusuorakulmion ala.
Suorakulmion kaikkien sivujen pituudet ovat positiivisia, joten saadaan määrittelyehdot

$$4x > 0 \text{ ja } 5x > 0 \text{ ja } x - 1 > 0 \text{ ja } 2(x+1) > 0$$

$$x > 0 \text{ ja } x > 0 \text{ ja } x > 1 \text{ ja } x > -1$$

Kun nämä ehdot yhdistetään, saadaan määrittelyehdoksi $x > 1$.

$$A = 4x \cdot 5x - (x-1) \cdot \big(2(x+1)\big)$$

$$= 20x^2 - (x-1)(2x+2)$$

$$= 20x^2 - (2x^2 + 2x - 2x - 2)$$

$$= 20x^2 - (2x^2 - 2)$$

$$= 20x^2 - 2x^2 + 2$$

$$= 18x^2 + 2$$

Tiedetään, että väritetyn osan pinta-ala on 74, joten voidaan muodostaa yhtälö.

$$18x^2 + 2 = 74$$

$$18x^2 = 74 - 2 \qquad \big| : 18$$

$$x^2 = \frac{72}{18}$$

$$x^2 = 4$$

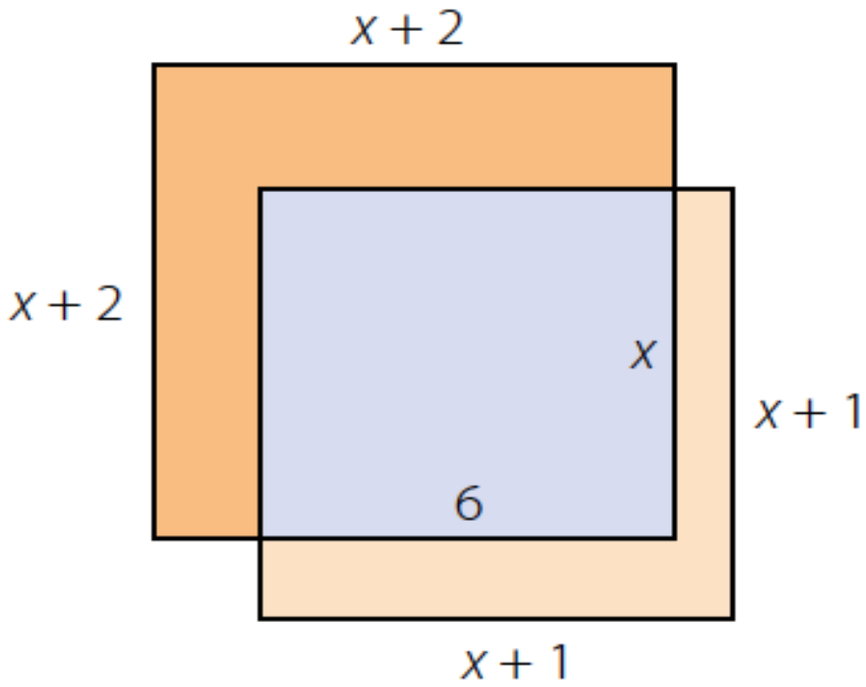
$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

Määrittelyehdon mukaan $x > 1$, joten saadaan ratkaisuksi $x = 2$.

Vastaus $x = 2$

50



Koko kuvion pinta-ala saadaan laskemalla yhteen neliöiden alat ja vähentämällä summasta kahteen kertaan mukaan tullut sininen keskiosa.
Sivujen pituudet ovat positiivisia, joten saadaan määrittelyehdot

$$x+2>0 \quad \text{ja} \quad x+2>0 \quad \text{ja} \quad x>0$$

$$x>-1 \quad \text{ja} \quad x>-2 \quad \text{ja} \quad x>0$$

Yhdistämällä ehdot saadaan määrittelyehdoksi $x>0$.

Pinta-ala on

$$A=(x+2)^2+(x+1)^2-6\cdot x$$

$$=(x+2)(x+2)+(x+1)(x+1)-6x$$

$$=x^2+2x+2x+2^2+x^2+x+x+1^2-6x$$

$$=2x^2+5$$

Tiedetään, että ala on $A = 77$, joten voidaan muodostaa yhtälö.

$$2x^2 + 5 = 77$$

$$2x^2 = 77 - 5 \qquad \big| : 2$$

$$x^2 = \frac{72}{2}$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm\sqrt{36}$$

$$x = \pm 6$$

Koska määrittelyehdon mukaan $x > 0$, saadaan ratkaisuksi $x = 6$.

Vastaus $x = 6$

51

Taulukoidaan tehtävässä annetut tiedot ja muodostetaan lauseke myyntitulolle, kun x on myyntihinnan korotus sentteinä.

Jokainen 10 sentin korotus myyntihinnassa laskee päivämyyntiä 2 kukkakimpulla. Tällöin jokainen sentin korotus laskee päivämyyntiä $\frac{2}{10} = 0,2$ kukkakimpulla.

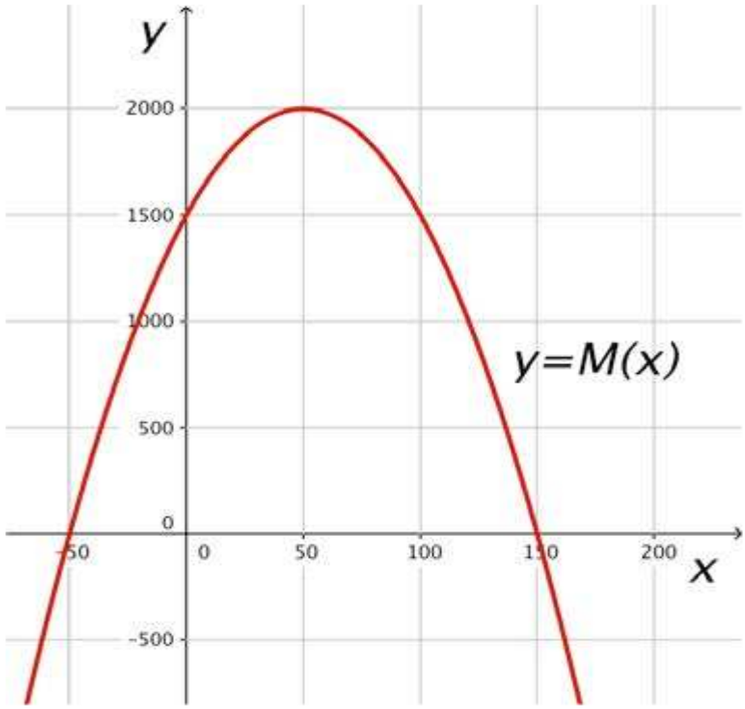
Myyntitulo saadaan kertomalla myyty kukkakimppujen kappalemäärä yksikköhinnalla.

Myyntihinta snt/kpl	Myyntimäärä kpl	Myyntitulo snt
50	30	30·50
$50 + x$	$30 - 0,2x$	$(30 - 0,2x)\cdot\ (50 + x)$

Sievennetään myyntitulon lauseke.

$$\begin{aligned} M(x) &= (30 - 0,2x)(50 + x) \\ &= 1500 + 30x - 10x - 0,2x^2 \\ &= -0,2x^2 + 20x + 1500 \end{aligned}$$

Piirretään funktion $M(x)$ kuvaaja geometriaohjelmalla.



Kuvaajan perusteella myyntitulo funktio M näyttäisi saavan suurimman arvonsa, kun $x \approx 50$.
Tarkistetaan tämä laskemalla myyntitulon $M(x)$ arvoja sijoittamalla x:lle arvoja sentin tarkkuudella.

x	$M(x)$	SUURIN ARVO
49	1999,80	
50	2000	
51	1999,80	

Myyntitulo on siis suurin, kun hinnankorotus $x = 50$ snt, jolloin kukkakimpun myyntihinta on 50snt + 50 snt = 100 snt = 1 euro.

Vastaus Myyntitulon lauseke on $-0,2x^2 + 20x + 1500$, jossa x on hinnankorotus sentteinä. Myyntitulo on suurin, kun kukkakimpun myyntihinta on 1 euro.

52

a) $(a+3)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$

b) $(a+1)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 1 + 1^2 = a^2 + 2a + 1$

c) $(3a+1)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 1 + 1^2 = 9a^2 + 6a + 1$

Vastaus a) $a^2 + 6a + 9$

b) $a^2 + 2a + 1$

c) $9a^2 + 6a + 1$

53

a) $(a-4)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-4) + (-4)^2 = a^2 - 8a + 16$

b) $(b-8)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot (-8) + (-8)^2 = b^2 - 16b + 64$

c) $(3-x)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot (-x) + (-x)^2 = 9 - 6x + x^2 \ (= x^2 - 6x + 9)$

Vastaus a) $a^2 - 8a + 16$

b) $b^2 - 16b + 64$

c) $9 - 6x + x^2$

54

a) $(2x+6)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 6 + 6^2 = 4x^2 + 24x + 36$

b) $(2x)^2 + 6^2 = 4x^2 + 36$

55

a) $(7x+1)^2 = (7x)^2 + 2 \cdot 7x \cdot 1 + 1^2 = 49x^2 + 14x + 1$

b) $(2x-4)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-4) + (-4)^2 = 4x^2 - 16x + 16$

c) $(5-4x)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot (-4x) + (-4x)^2 = 25 - 40x + 16x^2$

Vastaus a) $49x^2 + 14x + 1$

b) $4x^2 - 16x + 16$

c) $25 - 40x + 16x^2$

56

a) $(x^2+1)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2$

$= x^{2 \cdot 2} + 2x^2 + 1$

$= x^4 + 2x^2 + 1$

b) $(x^3-4)^2 = (x^3)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot (-4) + (-4)^2$

$= x^{3 \cdot 2} - 8x^3 + 16$

$= x^6 - 8x^3 + 16$

c) $(x^4+6)^2 = (x^4)^2 + 2 \cdot x^4 \cdot 6 + 6^2$

$= x^{4 \cdot 2} + 12x^4 + 36$

$= x^8 + 12x^4 + 36$

Vastaus

a) $x^4 + 2x^2 + 1$
b) $x^6 - 8x^3 + 16$
c) $x^8 + 12x^4 + 36$

57

a) $\left(x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right)^2$

$= x^{2 \cdot 2} - x^2 + \frac{1}{4}$

$= x^4 + x^2 + \frac{1}{4}$

b) $(x^3 - x)^2 = (x^3)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot (-x) + x^2$

$= x^{3 \cdot 2} - 2x^4 + x^2$

$= x^6 - 2x^4 + x^2$

c) $(3x^3 + 1)^2 = (3x^3)^2 + 2 \cdot 3x^3 \cdot 1 + 1^2$

$= 9x^{3 \cdot 2} + 6x^3 + 1$

$= 9x^6 + 6x^3 + 1$

Vastaus a) $x^4 + x^2 + \frac{1}{4}$

b) $x^6 - 2x^4 + x^2$

c) $9x^6 + 6x^3 + 1$

58

a) $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$

b) $x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x - 1)^2$

59

a) $x^2 + 8x + a = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + a$

$= (x+4)^2,$ kun $a = 4^2 = 16$

b) $x^2 + ax + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{a}{2} + 5^2$

$= (x+5)^2,$ kun $\frac{a}{2} = 5$ eli $a = 10$

tai

$x^2 + ax + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{a}{2} + (-5)^2$

$= (x-5)^2,$ kun $\frac{a}{2} = -5$ eli $a = -10$

c) $4x^2 - 8x + a = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-2) + a$

$= (2x-2)^2,$ kun $a = (-2)^2 = 4$

Vastaus a) $a = 16$
b) $a = 10$ tai $a = -10$
c) $a = 4$

60

a) $(x+1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) $(x-1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-1) + 3 \cdot x \cdot (-1)^2 + (-1)^3$

$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

c) $(-x+2)^3 = (2-x)^3$

$= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot (-x) + 3 \cdot 2 \cdot (-x)^2 + (-x)^3$

$= 8 - 12x + 6x^2 - x^3$

$= -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$

61

a) $(3x-2)^3 = (3x)^3 + 3\cdot(3x)^2\cdot(-2)^1 + 3\cdot(3x)^1\cdot(-2)^2 + (-2)^3$

$= 27x^3 + 3\cdot 9x^2\cdot(-2) + 9x\cdot 4 - 8$

$= 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

b) $(5x+1)^3 = (5x)^3 + 3\cdot(5x)^2\cdot 1 + 3\cdot 5x\cdot 1^2 + 1^3$

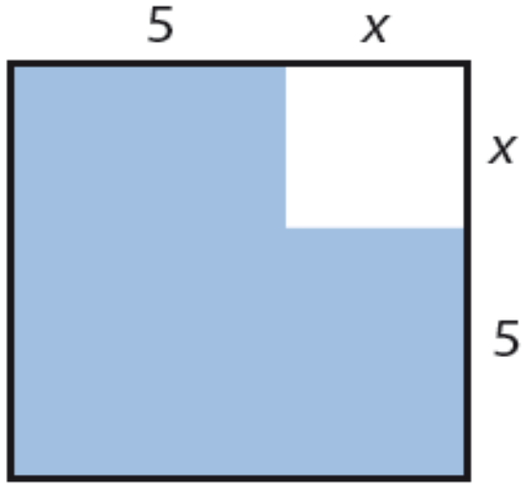
$= 125x^3 + 3\cdot 25x^2 + 15x + 1$

$= 125x^3 + 75x^2 + 15x + 1$

c) $(-x-1)^3 = (-x)^3 + 3\cdot(-x)^2\cdot(-1) + 3\cdot(-x)\cdot(-1)^2 + (-1)^3$

$= -x^3 - 3x^2 - 3x - 1$

62



Pinta-ala saadaan laskemalla koko neliön ala ja vähentämällä siitä värittämättömän pikkuneliön ala.

$$A = (5+x)^2 - x^2$$

$$= 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + x^2 - x^2$$

$$= 25 + 10x$$

Saadaan yhtälö

$$A = 65$$

$$25 + 10x = 65$$

$$10x = 65 - 25$$

$$10x = 40 \qquad | : 10$$

$$x = 4$$

Vastaus $x = 4$

63

Olkoot peräkkäiset kokonaisluvut x ja $x+1$, $x \in Z$.

Opettajan syntymävuodelle pätee yhtälö

$$(x+1)^2 - x^2 = 1991$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - x^2 = 1991$$

$$2x + 1 = 1991$$

$$2x = 1991 - 1$$

$$2x = 1990 \qquad \big| : 2$$

$$x = 995$$

Peräkkäiset kokonaisluvut ovat 995 ja 996.

Vastaus 995 ja 996

64

a) $(5x+1)^2 = (5x)^2 + 2\cdot 5x\cdot 1 + 1^2$

$= 25x^2 + 10x + 1$

b) $(x-7)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot(-7) + (-7)^2$

$= x^2 - 14x + 49$

c) $\left(-x-\frac{1}{2}\right)^2 = (-x)^2 + 2\cdot(-x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$= x^2 + 2x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= x^2 + x + \frac{1}{4}$

65

a) $(3+x)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + x^2$

$= 9^2 + 6x + x^2$

b) $(5+2x)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 2x + (2x)^2$

$= 25 + 20x + 4x^2$

c) $(8x)^2 + 3^2 = 8^2 \cdot x^2 + 9$

$= 64x^2 + 9$

66

a) $(-3x-4)^2 = (-3x)^2 + 2\cdot(-3x)\cdot(-4) + (-4)^2$

$= 9x^2 + 24x + 16$

b) $\left(\frac{x}{2}-4\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{x}{2}\cdot(-4) + (-4)^2$

$= \frac{x^2}{4} - 4x + 16$

c) $(4x)^2 - 1^2 = 4^2\cdot x^2 - 1$

$= 16x^2 - 1$

67

a) $\left(x^3 + \frac{1}{3} \right)^2 = (x^3)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} \right)^2$

$= x^{3 \cdot 2} + \frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{9}$

$= x^6 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{9}$

b) $\left(-x^3 + x \right)^2 = (-x^3)^2 + 2 \cdot (-x^3) \cdot x + x^2$

$= x^{3 \cdot 2} - 2x^4 + x^2$

$= x^6 - 2x^4 + x^2$

c) $\left(\frac{3}{4} x^2 - 1 \right)^2 = \left(\frac{3}{4} x^2 \right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} x^2 \cdot (-1) + (-1)^2$

$= \frac{3^2}{4^2} x^{2 \cdot 2} - \frac{3}{2} x^2 + 1$

$= \frac{9}{16} x^4 - \frac{3}{2} x^2 + 1$

68

a) $x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

b) $4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5x + 5^2$

$$= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-5) + (-5)^2$$

$$= (2x - 5)^2$$

69

a) $x^4 + 6x^2 + a = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 3 + a$

$= \left(x^2 + 3\right)^2$, kun $a = 3^2 = 9$

b) $ax^2 - 30x + 25 = ax^2 + 2 \cdot (-3x) \cdot 5 + 5^2$

$= (-3x + 5)^2$, kun $a = (-3)^2 = 9$

c) $4x^4 + ax^2 + 16 = (2x^2)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot \frac{a}{4} + 4^2$

$= (2x^2 + 4)^2$, kun $\frac{a}{4} = 4$ eli $a = 16$

tai

$4x^4 + ax^2 + 16 = (2x^2)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot \frac{a}{4} + (-4)^2$

$= (2x^2 - 4)^2$, kun $\frac{a}{4} = -4$ eli $a = -16$

Vastaus a) $a = 9$
b) $a = 9$
c) $a = -16$ tai $a = 16$

70

a) $(x+2)^3 = x^3 + 3\cdot x^2 \cdot 2 + 3\cdot x \cdot 2^2 + 2^3$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

b) $(-3x+1)^3 = (-3x)^3 + 3\cdot(-3x)^2 \cdot 1 + 3\cdot(-3x)\cdot 1^2 + 1^3$

$= -27x^3 + 27x^2 - 9x + 1$

c) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^3 = x^3 + 3\cdot x^2 \cdot \frac{1}{2} + 3\cdot x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$= x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$

71

a) $(x^2-1)^3 = (x^2)^3 + 3\cdot(x^2)^2\cdot(-1) + 3\cdot x^2\cdot(-1)^2 + (-1)^3$

$= x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

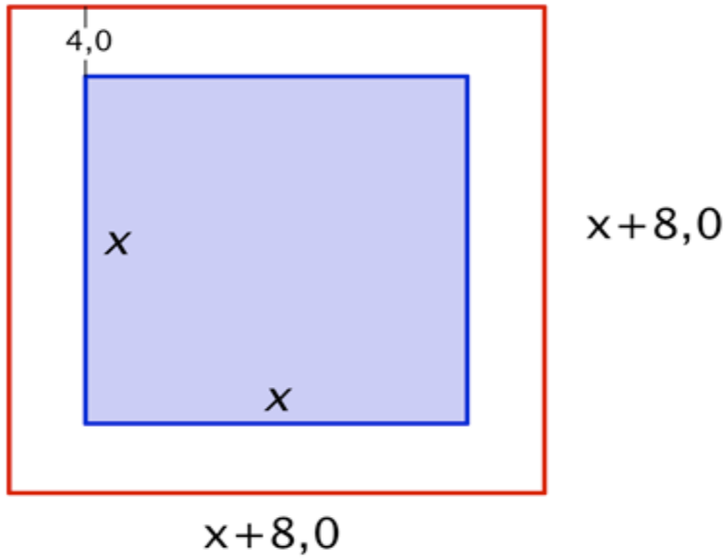
b) $(5x+2)^3 = (5x)^3 + 3\cdot(5x)^2\cdot 2 + 3\cdot 5x\cdot 2^2 + 2^3$

$= 125x^3 + 150x^2 + 60x + 8$

c) $\left(-x^2-1\right)^3 = (-x^2)^3 + 3\cdot(-x^2)^2\cdot(-1) + 3\cdot(-x^2)\cdot(-1)^2 + (-1)^3$

$= -x^6 - 3x^4 - 3x^2 - 1$

72



Kehyksen pinta-alan avulla saadaan yhtälö

$$(x+8)^2 - x^2 = 544$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 8 + 8^2 - x^2 = 544$$

$$16x + 64 = 544$$

$$16x = 544 - 64 \qquad |:16$$

$$x = \frac{480}{16}$$

$$x = 30 \text{ (cm)}$$

Maalauksen pinta-ala on $A = 30^2 = 900 \text{ (cm}^2\text{)}$

Vastaus 900 cm^2

73

Peräkkäiset parilliset luvut ovat $2n$ ja $2n+2$.

Isoäidin syntymävuosi on

$$(2n+2)^2-(2n)^2=1948$$

$$(2n)^2+2\cdot 2n\cdot 2+2^2-(2n)^2=1948$$

$$8n+4=1948$$

$$8n=1948-4 \qquad |:8$$

$$n=\frac{1944}{8}$$

$$n=243$$

Peräkkäiset parilliset luvut ovat

$2n=2\cdot 243=486$ sekä $486+2=488$.

Seuraava vastaava vuosiluku on $490^2-488^2=1956$.

Vastaus 486 ja 488. Seuraava vastaava vuosi on 1956.

74

a) Kokonaisluku, jonka viimeinen numero on 5 on muotoa $10n+5$, jossa $n \in Z$.

Luvun neliö on

$$\begin{aligned}(10x+5)^2 &= (10n)^2 + 2\cdot 10n\cdot 5 + 5^2\\ &= 100n^2 + 100n + 25\\ &= 100(n^2+n) + 25\end{aligned}$$

Koska luku $n^2+n \in Z$, niin luku $100(n^2+n)$ on myös kokonaisluku ja sen kaksi viimeistä numeroa ovat nollia. Kun tähän lukuun lisätään luku 25, saadaan kokonaisluku, jonka kaksi viimeistä numeroa ovat 2 ja 5. □

b) $$\begin{aligned}65^2 &= (60+5)^2\\ &= (10\cdot 6+5)^2\\ &= (10\cdot 6)^2 + 2\cdot 10\cdot 6\cdot 5 + 5^2\\ &= 10^2\cdot 6^2 + 100\cdot 6 + 25\\ &= 100\cdot 36 + 100\cdot 6 + 25\\ &= 100(36+6) + 25\\ &= 100\cdot 42 + 25\\ &= 4225\end{aligned}$$

Vastaus b) $65^2 = 4225$

75

Olkoot kaksi kokonaislukua a ja b.

Väitteen mukaan $(a+b)^2 - 4 \cdot a \cdot b$ on jonkin kokonaisluvun neliö.

Todistetaan väite sieventämällä lauseke.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 - 4 \cdot a \cdot b &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 - 4 \cdot a \cdot b \\ &= a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ &= a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 \\ &= (a-b)^2 \in Z \qquad \square\end{aligned}$$

76

Pariton luku on aina muotoa $2n+1$, jossa $n \in Z$.

Lasketaan luvun $2n+1$ kuutio.

$$\begin{aligned}(2n+1)^3 &= (2n)^3 + 3\cdot(2n)^2\cdot 1 + 3\cdot 2n\cdot 1^2 + 1^3\\ &= 8n^3 + 3\cdot 4n^2 + 6n + 1\\ &= 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1\\ &= 2\cdot(4n^3 + 6n^2 + 3n) + 1\end{aligned}$$

Saatu luku on pariton kokonaisluku, koska $4n^3 + 6n^2 + 3n \in Z$. □

Vastaus on

77

a) Pascalin kolmion neljäs rivi on

$$1 \qquad 1+3 \qquad 3+3 \qquad 3+1 \qquad 1 \qquad \text{eli}$$

$$1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1$$

b) $(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b^1 + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a^1 \cdot b^3 + 1 \cdot b^4$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

c) $(x+3)^4 = x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot 3 + 6 \cdot x^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot x \cdot 3^3 + 3^4$

$= x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$

$(x-1)^4 = x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot (-1) + 6 \cdot x^2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot x \cdot (-1)^3 + (-1)^4$

$= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

78

a) $(x+7)(x-7) = x^2 - 7^2$

$= x^2 - 49$

b) $(x-1)(x+1) = x^2 - 1^2$

$= x^2 - 1$

c) $(3+x)(3-2x) = 3^2 - 3 \cdot 2x + x \cdot 3 - x \cdot 2x$

$= 9 - 6x + 3x - 2x^2$

$= -2x^2 - 3x + 9$

79

a) $(2x+3)(2x-3) = (2x)^2 - 3^2$

$= 4x^2 - 9$

b) $(x^2-8)(x^2+8) = (x^2)^2 - 8^2$

$= x^4 - 64$

80

a) $5(x+2)(x-2) = 5\left(x^2 - 2^2\right)$

$= 5x^2 - 20$

b) $x^2 - 2(x+3)(x-3) = x^2 - 2\left(x^2 - 3^2\right)$

$= x^2 - 2x^2 + 2 \cdot 9$

$= -x^2 + 18$

81

a) $(x^3 - 9)(x^3 + 9) = (x^3)^2 - 9^2$

$= x^6 - 81$

b) $(x^2 + 3)(x^2 - 3) = (x^2)^2 - 3^2$

$= x^4 - 9$

82

a) $5+(x+2)(x-2)=5+x^2-2^2$

$=5+x^2-4$

$=x^2+1$

b) $x^2-(2x+1)(2x-1)=x^2-\left((2x)^2-1^2\right)$

$=x^2-4x^2+1$

$=-3x^2+1$

83

a) $(x+3)(x-3)(x^2+9) = (x^2-3^2)(x^2+9)$

$= (x^2-9)(x^2+9)$

$= (x^2)^2 - 9^2$

$= x^4 - 81$

b) $(x+4)(x-4)-(x-2)^2 = x^2 - 4^2 - \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot (-2) + (-2)^2\right)$

$= x^2 - 16 - (x^2 - 4x + 4)$

$= x^2 - 16 - x^2 + 4x - 4$

$= 4x - 20$

84

a) $(x-5)^2 = (x+5)(x-5)$

$x^2 + 2 \cdot x \cdot (-5) + (-5)^2 = x^2 - 5^2$

$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 25$

$x^2 - x^2 - 10x = -25 - 25$

$-10x = -50 \qquad | : (-10)$

$x = 5$

b) $(2x+3)^2 = 4(x+3)(x-3)$

$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4(x^2 - 3^2)$

$4x^2 + 12x + 9 = 4x^2 - 36$

$12x = -36 - 9 \qquad | : 12$

$x = \frac{-45^{(3}}{12}$

$x = \frac{-15}{4}$

$x = -3\frac{3}{4}$

Vastaus a) $x = 5$ b) $x = -3\frac{3}{4}$

85

a) $x^2 - 16 = x^2 - 4^2$

$= (x + 4)(x - 4)$

b) $9x^2 - 1 = 3^2 x^2 - 1^2$

$= (3x)^2 - 1^2$

$= (3x + 1)(3x - 1)$

c) $25x^2 - 9 = 5^2 x^2 - 3^2$

$= (5x)^2 - 3^2$

$= (5x + 3)(5x - 3)$

86

a) $\dfrac{x^2-16}{3x+12} = \dfrac{x^2-4^2}{3(x+4)}$

$= \dfrac{\cancel{(x+4)}\,(x-4)}{3\,\cancel{(x+4)}}$

$= \dfrac{x-4}{3}$

b) $\dfrac{1-9x^2}{1-3x} = \dfrac{1^2-3^2x^2}{1-3x}$

$= \dfrac{1^2-(3x)^2}{1-3x}$

$= \dfrac{(1+3x)\,\cancel{(1-3x)}}{\cancel{1-3x}}$

$= 1+3x$

c) $\dfrac{5x+15}{x^2-9} = \dfrac{5(x+3)}{x^2-3^2}$

$= \dfrac{5\,\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}\,(x-3)}$

$= \dfrac{5}{x-3}$

Vastaus a) $\dfrac{x-4}{3}$ b) $1+3x$ c) $\dfrac{5}{x-3}$

87

a) $101^2 - 99^2 = (101 + 99)(101 - 99)$

$= 200 \cdot 2$

$= 400$

b) $53^2 - 47^2 = (53 + 47)(53 - 47)$

$= 100 \cdot 6$

$= 600$

Vastaus a) 400 b) 600

88

a) $(3x+4)(3x-4) = (3x)^2 - 4^2$

$= 3^2 x^2 - 16$

$= 9x^2 - 16$

b) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= x^2 - \frac{1}{2^2}$

$= x^2 - \frac{1}{4}$

c) $(3x+2)(-3x-2) = 3x \cdot (-3x) - 3x \cdot 2 - 2 \cdot 3x - 2^2$

$= -3^2 x^2 - 6x - 6x - 4$

$= -9x^2 - 12x - 4$

89

a) $(2x^2+5)(2x^2-5) = (2x)^2 - 5^2$

$= 2^2 x^2 - 25$

$= 4x^2 - 25$

b) $(-x+4)(-x-4) = (-x)^2 - 4^2$

$= x^2 - 16$

c) $(4a^3+2b^2)(4a^3-2b^2) = (4a^3)^2 - (2b^2)^2$

$= 4^2(a^3)^2 - 2^2(b^2)^2$

$= 16a^6 - 4b^4$

90

a) $x-(x+3)\cdot 2 = x-(2x+6)$

$= x-2x-6$

$= -x-6$

b) $x^2-(x+3)(x-3) = x^2-(x^2-3^2)$

$= x^2-x^2+3^2$

$= 9$

c) $(x+3)^2-(x-3)^2 = \big((x+3)+(x-3)\big)\big((x+3)-(x-3)\big)$

$= (2x)\cdot(6)$

$= 12x$

c-kohta toisin:

$(x+3)^2-(x-3)^2 = x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2-\big(x^2+2\cdot x\cdot(-3)+(-3)^2\big)$

$= x^2+6x+9-x^2+6x-9$

$= 12x$

Vastaus a) $x-2(x+3) = -x-6$

b) $x^2-(x+3)(x-3) = 9$

c) $(x+3)^2-(x-3)^2 = 12x$

91

a) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$

$$=x^2+x+\frac{1}{4}-x^2+\frac{1}{4}$$

$$=x+\frac{2}{4}$$

$$=x+\frac{1}{2}$$

b) $\left((x+3)(x-3)\right)^2=(x^2-3^2)^2$

$$=(x^2-9)^2$$

$$=(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot(-9)+(-9)^2$$

$$=x^4-18x^2+81$$

92

a) $4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-1=(2x-5)^2$

$$4\left(x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-1=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot(-5)+(-5)^2$$

$$4\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=4x^2-20x+25+1$$

$$4x^2-1=4x^2-20x+26$$

$$20x=1+26 \qquad \big|:20$$

$$x=\frac{27}{20}$$

b) $(x+3)(x-3)-4x(x-1)=(1-x)(3x-1)$

$$x^2-9-4x^2+4x=3x-1-3x^2+x$$

$$-9-3x^2+4x=4x-1-3x^2$$

$$-9=-1$$

epätosi, ei ratkaisua

Vastaus a) $x=\frac{27}{20}$

b) ei ratkaisua

93

a) $(7x+6)(7x-6)(49x^2+36) = \left((7x)^2-6^2\right)(49x^2+36)$

$= (49x^2-36)(49x^2+36)$

$= (49x^2)^2-36^2$

$= 2401x^4-1296$

b) $(3x^2-4)^2-3(x^2-4)(x^2+4)$

$= (3x^2)^2+2\cdot 3x^2\cdot(-4)+(-4)^2-3(x^4-4^2)$

$= 9x^4-24x^2+16-3x^4+48$

$= 6x^4-24x^2+64$

94

a) $x^2 - 49 = x^2 - 7^2$

$= (x + 7)(x - 7)$

b) $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2$

$= (2x + 3)(2x - 3)$

c) $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2$

$= (x^2 + 4)(x^2 - 4)$

$= (x^2 + 4)(x^2 - 2^2)$

$= (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

95

a) $\dfrac{x^2-49}{x+7}=\dfrac{x^2-7^2}{x+7}$

$=\dfrac{\cancel{(x+7)}\,(x-7)}{\cancel{x+7}}$

$=x-7$

b) $\dfrac{36x^2-1}{6x-1}=\dfrac{(6x)^2-1^2}{6x-1}$

$=\dfrac{(6x+1)\,\cancel{(6x-1)}}{\cancel{6x-1}}$

$=6x+1$

c) $\dfrac{x^4-16}{2x+4}=\dfrac{(x^2)^2-4^2}{2x+4}$

$=\dfrac{(x^2+4)(x^2-4)}{2x+4}$

$=\dfrac{(x^2+4)\,\cancel{(x+2)}\,(x-2)}{2\,\cancel{(x+2)}}$

$=\dfrac{(x^2+4)(x-2)}{2}$

$\left(=\dfrac{x^3+4x-2x^2-8}{2}=\dfrac{x^3-2x^2+4x-8}{2}\right)$

96

a) $$\frac{x^2+10x+25}{4x+20}=\frac{x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2}{4(x+5)}$$

$$=\frac{(x+5)^{\cancel{2}}}{4\,\cancel{(x+5)}}$$

$$=\frac{x+5}{4}$$

b) $$\frac{4x^2+4x+1}{3-12x^2}=\frac{(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1^2}{3(1-4x^2)}$$

$$=\frac{(2x+1)^2}{3\left(1^2-(2x)^2\right)}$$

$$=\frac{(2x+1)^{\cancel{2}}}{3\,\cancel{(1+2x)}\,(1-2x)}$$

$$=\frac{2x+1}{3(1-2x)}$$

$$\left(=\frac{2x+1}{3-6x}\right)$$

Vastaus a) $\frac{x+5}{4}$ b) $\frac{2x+1}{3(1-2x)}$

97

Olkoon n kokonaisluku. Tutkitaan lukua $n^3 - n$.

a) Väite: $n^3 - n$ on kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo.

$$\begin{aligned} n^3 - n &= n(n^2 - 1) \\ &= n(n^2 - 1^2) \\ &= n(n+1)(n-1) \\ &= (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \end{aligned}$$

Saatiin kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo, joten väite on tosi. □

b) Väite: Luku $n^3 - n$ on aina jaollinen luvuilla 2 ja 3.

Kokonaisluvuista joka toinen on jaollinen kahdella ja joka kolmas on jaollinen kolmella. Koska $n^3 - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ on kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo, niin ainakin yksi luvuista on jaollinen kahdella (eli on parillinen) ja täsmälleen yksi on jaollinen kolmella. □

98

a) $31 = 32 - 1 = 2^5 - 1$

$127 = 128 - 1 = 2^7 - 1$

$8191 = 8192 - 1 = 2^{13} - 1$

b) Olkoon $n > 2$ parillinen kokonaisluku. Luku n voidaan esittää muodossa $n = 2k$ jollain $k = 2, 3, 4, \ldots$.

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{2k} - 1 \\ &= (2^k)^2 - 1^2 \\ &= (2^k + 1)(2^k - 1), \end{aligned}$$

jossa $2^k + 1 \in Z_+$ ja $2^k - 1 \in Z_+$. Luku $2^n - 1$ voidaan siis esittää kahden kokonaisluvun tulona. Koska $n > 2$, niin kumpikaan tulon $(2^k + 1)(2^k - 1)$ tekijöistä ei ole ykkönen. Näin luku $2^n - 1$ on jaollinen paitsi itsellään ja luvulla 1, myös kokonaisluvuilla $(2^k + 1)$ ja $(2^k - 1)$, joten $2^n - 1$ ei ole alkuluku. □

Huomaa, että ehto $n > 2$ on oleellinen. Jos sallittaisiin tapaus $n = 2$, niin tarkasteltava luku olisi alkuluku $2^2 - 1 = 3$. Edellä esitetty jako tekijöihin pätisi silloinkin:

$$2^2 - 1 = 2^{2 \cdot 1} - 1 = (2^1)^2 - 1^2 = (2 + 1) \cdot (2 - 1) = 3 \cdot 1$$

Tällöin saadaan tulos, jonka mukaan alkuluku 3 on jaollinen itsellään ja luvulla 1, mikä on kuten pitääkin.

99

$$1023 = 1024 - 1$$

$$= 2^{10} - 1$$

$$= 2^{5 \cdot 2} - 1^2$$

$$= (2^5)^2 - 1^2$$

$$= (2^5 + 1)(2^5 - 1)$$

$$= (32 + 1)(32 - 1)$$

$$= 33 \cdot 31$$

Vastaus $1023 = 2^{10} - 1$.
Koska $1023 = 31 \cdot 33$, niin 1023 ei ole alkuluku.

100

a) $\sqrt{9} = 3$, koska $3 \geq 0$ ja $3^2 = 9$.

b) $\sqrt{1} = 1$, koska $1 \geq 0$ ja $1^2 = 1$.

c) $\sqrt{0} = 0$, koska $0 \geq 0$ ja $0^2 = 0$.

d) $\sqrt{100} = 10$, koska $10 \geq 0$ ja $10^2 = 100$.

Vastaus a) 3 b) 1 c) 0 d) 10

101

a) $\sqrt{25} = 5$

b) $\sqrt{13} \quad (\approx 3,605...)$

c) $-\sqrt{13} \quad (\approx -3,605...)$

102

a) $\sqrt{81} = 9$

b) $-\sqrt{25} = -5$

c) $\sqrt{-25}$ ei ole määritelty.

d) $16 - \sqrt{16} = 16 - 4 = 12$

103

$\sqrt{400} = 20$ ja $\sqrt{900} = 30$. Tämän perusteella lukujen 400 ja 900 välillä olevat luonnolliset luvut, joiden neliöjuuri on luonnollinen luku ovat seuraavat:

$21^2 = 441$

$22^2 = 484$

$23^2 = 529$

$24^2 = 576$

$25^2 = 625$

$26^2 = 676$

$27^2 = 729$

$28^2 = 784$

$29^2 = 841$

Vastaus 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784 ja 841

104

a) $\sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$

b) $\sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$

c) $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

Vastaus a) 4 b) 8 c) 10

105

a) $\sqrt{7} = 2,6457... \approx 2,646$

b) $3 \cdot \sqrt{14} = 11,2249... \approx 11,225$

c) $\sqrt{6} + \sqrt{10} - \sqrt{16} = 1,6117... \approx 1,612$

Vastaus a) 2,646 b) 11,225 c) 1,612

106

a) $\left(\sqrt{23}\right)^2 = 23$

b) $\left(-\sqrt{19}\right)^2 = \left(\sqrt{19}\right)^2 = 19$

c) $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$

107

a) $x^2 = 49$

$x = -\sqrt{49}$ tai $x = \sqrt{49}$

$x = -7$ tai $x = 7$

b) $x^2 = 13$

$x = -\sqrt{13}$ tai $x = \sqrt{13}$

c) $x^2 + 4 = 0$

$\underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-4}_{<0}$

epätosi, ei ratkaisua

Vastaus a) $x = 7$ tai $x = 7$

b) $x = -\sqrt{13}$ tai $x = \sqrt{13}$

d) Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

108

a) $x^2 = 36$

$x = -\sqrt{36}$ tai $x = \sqrt{36}$

$x = -6$ tai $x = 6$

b) $2x^2 = 162 \quad | : 2$

$x^2 = 81$

$x = -\sqrt{81}$ tai $x = \sqrt{81}$

$x = -9$ tai $x = 9$

c) $x^2 + 4 = 9$

$x^2 = 9 - 4$

$x^2 = 5$

$x = -\sqrt{5}$ tai $x = \sqrt{5}$

Vastaus a) $x = -6$ tai $x = 6$

b) $x = -9$ tai $x = 9$

d) $x = -\sqrt{5}$ tai $x = \sqrt{5}$

109

a) $x^2 = 9,0$

$x = -\sqrt{9,0}$ tai $x = \sqrt{9,0}$

$x = -3,0$ tai $x = 3,0$

Neliön sivun pituus on positiivinen, joten sivun pituus on 3,0 m.

b) $x^2 = 28$

$x = -\sqrt{28}$ tai $x = \sqrt{28}$

Neliön sivun pituus on positiivinen, joten sivun pituus on $\sqrt{28} = 5,291... \approx 5,3$ (m).

c) $3,6 \text{ ha} = 3,6 \cdot (100\text{m} \cdot 100\text{m}) = 36\ 000 \text{ m}^2$

$x^2 = 36\ 000$

$x = -\sqrt{36\ 000}$ tai $x = \sqrt{36\ 000}$

Neliön sivun pituus on positiivinen, joten sivun pituus on $\sqrt{36\ 000} = 189,7... \approx 190$ (m).

Vastaus a) 3,0 m
b) 5,3 m
d) 190 m

110

a) $\sqrt{121} = 11$

b) $\sqrt{3600} = 60$

c) $\sqrt{0,09} = 0,3$

d) $\sqrt{2,25} = 1,5$

111

a) $\sqrt{9}-\sqrt{25}=3-5=-2$

b) $\sqrt{9-25}=\sqrt{-16}$ ei määritelty, koska $-16<0$

Vastaus a) $\sqrt{9}-\sqrt{25}=-2$ b) $\sqrt{9-25}=\sqrt{-16}$ ei määritelty

112

a) Luku 1 on luvun 1 neliöjuuri eli $\sqrt{1} = 1$.

b) Luku 9 on luvun 81 neliöjuuri, eli $\sqrt{81} = 9$.

c) Luku -6 (< 0) ei ole minkään luvun neliöjuuri, sillä neliöjuuren arvo on aina positiivinen.

Vastaus a) 1 b) 81 c) ei minkään

113

a) $\left(\sqrt{17}\right)^2 = 17$

b) $\left(-\sqrt{\pi}\right)^2 = \left(\sqrt{\pi}\right)^2 = \pi$

c) $\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^2 = 1+\sqrt{2}$

114

a) $10 \cdot \sqrt{9} - 4 \cdot \sqrt{25} + \sqrt{100} = 10 \cdot 3 - 4 \cdot 5 + 10$

$= 30 - 20 + 10$

$= 20$

b) $\sqrt{90 - 100 + 19} = \sqrt{-10 + 19}$

$= \sqrt{9}$

$= 3$

115

a) $\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25}$

$= \sqrt{169}$

$= 13$

b) $\left(\sqrt{4}\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{4}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2$

$= 4 \cdot 5$

$= 20$

116

Merkitään kysyttyä lukua kirjaimella x ja muodostetaan yhtälö.

a) $\sqrt{\sqrt{x}} = 2$

$\sqrt{x} = 2^2$

$x = (2^2)^2$

$x = 4^2$

$x = 16$

b) $\sqrt{\sqrt{x}} = 3$

$\sqrt{x} = 3^2$

$x = (3^2)^2$

$x = 9^2$

$x = 81$

c) $\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt{7}$

$\sqrt{x} = \left(\sqrt{7}\right)^2$

$\sqrt{x} = 7$

$x = 7^2$

$x = 49$

Vastaus a) 16 b) 81 c) 49

117

a) $\sqrt{1+x^2}$ | Sijoitetaan $x=-1$.

$=\sqrt{1+(-1)^2}$

$=\sqrt{1+1}$

$=\sqrt{2}$

b) $\sqrt{1+x^2}$ | Sijoitetaan $x=\sqrt{3}$.

$=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}$

$=\sqrt{1+3}$

$=\sqrt{4}$

$=2$

c) $\sqrt{1+x^2}$ | Sijoitetaan $x=\sqrt{5}$.

$=\sqrt{1+\left(\sqrt{5}\right)^2}$

$=\sqrt{1+5}$

$=\sqrt{6}$

Vastaus a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{6}$

118

a) $x^2 - 81 = 0$

$x^2 = 81$

$x = -\sqrt{81}$ tai $x = \sqrt{81}$

$x = -9$ tai $x = 9$

b) $5x^2 = 80 \qquad |:5$

$x^2 = 16$

$x = -\sqrt{16}$ tai $x = \sqrt{16}$

$x = -4$ tai $x = 4$

Vastaus a) $x = -9$ tai $x = 9$ b) $x = -4$ tai $x = 4$

119

a) $x^2 - 1 = 10$

$x^2 = 11$

$x = -\sqrt{11}$ tai $x = \sqrt{11}$

b) $2x(x+2) = 4x + 4$

$2x^2 + 4x = 4x + 4$

$2x^2 = 4 \qquad | : 2$

$x^2 = 2$

$x = -\sqrt{2}$ tai $x = \sqrt{2}$

Vastaus a) $x = -\sqrt{11}$ tai $x = \sqrt{11}$ b) $x = -\sqrt{2}$ tai $x = \sqrt{2}$

120

a) Merkitään neliön sivua kirjaimella x ja muodostetaan yhtälö.

$$x^2 = 2\ 275\ 282 \text{ ha}$$

$$x^2 = 2\ 275\ 282 \cdot (0{,}1 \text{ km} \cdot 0{,}1 \text{ km})$$

$$x^2 = 22\ 752{,}82 \text{ km}^2$$

$$x = (\pm)\sqrt{22\ 752{,}82 \text{ km}^2} \qquad \mid x > 0$$

$$x = 150{,}8... \text{ km} \approx 151 \text{ km}$$

b) Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r ja muodostetaan yhtälö.

$$\pi r^2 = 34\ 526\ \text{km}^2 \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Ympyrän pinta-ala } A = \pi r^2. \\ \\ : \pi \end{array} \right.$$

$$r^2 = \frac{34\ 526\ \text{km}^2}{\pi}$$

$$r = (\pm)\sqrt{\frac{34\ 526\ \text{km}^2}{\pi}} \qquad \mid r > 0$$

$$r = 104{,}8... \text{ km}$$

Ympyrän halkaisija on

$$2 \cdot r = 2 \cdot 104{,}8... \text{ km} = 209{,}6... \text{ km} \approx 210 \text{ km}$$

Vastaus a) 151 km b) 210 km

121

$\sqrt{A} \approx a + \frac{r}{2a}$, jossa $A = a^2 + r$ sekä $a \in N$ sellainen, että r on mahdollisimman lähellä nollaa oleva luku.

a) $10 = 3^2 + 1$

$$\sqrt{10} \approx a + \frac{r}{2a} \quad \Big| \; a = 3,\ r = 1$$

$$= 3 + \frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$= 3\frac{1}{6} \approx 3{,}167 \quad \Big| \text{ Laskimella } \sqrt{10} \approx 3{,}162.$$

b) $35 = 6^2 - 1$

$$\sqrt{35} \approx a + \frac{r}{2a} \quad \Big| \; a = 6,\ r = -1$$

$$= 6 + \frac{-1}{2 \cdot 6}$$

$$= 5\frac{11}{12} \approx 5{,}917 \quad \Big| \text{ Laskimella } \sqrt{35} \approx 5{,}916.$$

c) $129 = 11^2 + 8$

$$\sqrt{129} \approx a + \frac{r}{2a} \qquad \Big| \; a = 11, \;\; r = 8$$

$$= 11 + \frac{8}{2 \cdot 11}$$

$$= 11 + \frac{8}{22} \approx 11{,}364 \qquad \Big| \; \text{Laskimella } \sqrt{129} \approx 11{,}358.$$

Vastaus a) 3,167; laskin 3,162
b) 5,918; laskin 5,916
c) 11,364; laskin11,358

122

a) $\sqrt{64 \cdot 25} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{25}$

$= 8 \cdot 5$

$= 40$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18}$

$= \sqrt{36}$

$= 6$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20}$

$= \sqrt{100}$

$= 10$

Vastaus a) 40 b) 6 c) 10

123

a) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}$

$= \frac{2}{5}$

b) $\sqrt{1\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{9+7}{9}}$

$= \sqrt{\frac{16}{9}}$

$= \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}$

$= \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

c) $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{8+1}{4}}$

$= \sqrt{\frac{9}{4}}$

$= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$

$= \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Vastaus a) $\frac{2}{5}$ b) $1\frac{1}{3}$ c) $1\frac{1}{2}$

124

a) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}}$

$= \sqrt{4}$

$= 2$

b) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{12}{3}}$

$= \sqrt{4}$

$= 2$

c) $\dfrac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{5 \cdot 15}{3}}$

$= \sqrt{\dfrac{5 \cdot 5 \cdot 3}{3}}$

$= \sqrt{5^2}$

$= 5$

Vastaus a) 2 b) 2 c) 5

125

a) $\sqrt{16^2} = |16|$

$= 16$

b) $\sqrt{(-3)^2} = |-3|$

$= 3$

Toisin:

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9}$

$= 3$

c) $-\sqrt{13^2} = -|13|$

$= -13$

Vastaus a) 16 b) 3 c) – 13

126

a) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2}$

$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2}$

$= \sqrt{16} \cdot \sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}$

c) $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3}$

$= \sqrt{25} \cdot \sqrt{3}$

$= 5\sqrt{3}$

Vastaus a) $2\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{2}$ c) $5\sqrt{3}$

127

a) $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

b) $7\sqrt{2} + \sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2}$

128

a) $3\sqrt{5}+2\sqrt{3}-\sqrt{5}+3\sqrt{3}=2\sqrt{5}+5\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}-2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

$$=4\sqrt{3}-2\sqrt{2}$$

129

m	***n***	$\sqrt{2}$
z	4	***y***
$8\sqrt{2}$	***x***	$\sqrt{32}$

Lävistäjän avulla saadaan lukujen tuloksi $8\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2}$.

Alin vaakarivi:

$$8\sqrt{2} \cdot x \cdot \sqrt{32} = 8\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2}$$

$$x \cdot \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$x = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{32}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{32}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{16}} = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Oikea pystyrivi:

$$\sqrt{2} \cdot y \cdot \sqrt{32} = 8\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2}$$

$$y = \frac{8\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}} = \frac{8 \cdot 4 \cdot \sqrt{4}}{\sqrt{64}} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 2}{8} = 8$$

Keskimmäinen vaakarivi:

$$z \cdot 4 \cdot 8 = 8\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2}$$

$$z = \frac{8\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2}}{4 \cdot 8} = \frac{\sqrt{4}}{1} = 2$$

Vasen pystyrivi:

$$m \cdot 2 \cdot 8\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2}$$

$$m \cdot 2 = 4\sqrt{2}$$

$$m = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$$

Ylin vaakarivi:

$$\sqrt{8} \cdot n \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} \cdot n = 8\sqrt{2} \cdot 4$$

$$n = \frac{8\sqrt{2} \cdot 4}{\sqrt{8}} = \frac{8\sqrt{2} \cdot 4}{2\sqrt{2}} = 8 \cdot 2 = 16$$

$\sqrt{8}$	**16**	$\sqrt{2}$
2	4	**8**
$8\sqrt{2}$	**1**	$\sqrt{32}$

130

a) $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50}=\sqrt{4\cdot 2}+\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}$

$=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

$=10\sqrt{2}$

b) $\sqrt{8+18+50}=\sqrt{76}$

$=\sqrt{4\cdot 19}$

$=2\sqrt{19}$

Vastaus a) $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50}=10\sqrt{2}$ b) $\sqrt{8+18+50}=2\sqrt{19}$

131

a) $\sqrt{48}-\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 3}-\sqrt{16\cdot 2}$

$=4\sqrt{3}-4\sqrt{2}$

b) $\sqrt{48-32}=\sqrt{16}$

$=4$

Vastaus a) $\sqrt{48}-\sqrt{32}=4\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ b) $\sqrt{48-32}=4$

132

a) $\sqrt{48} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{48} - \sqrt{6 \cdot 8}$

$= \sqrt{48} - \sqrt{48}$

$= 0$

b) $\sqrt{1 + \sqrt{9}} = \sqrt{1 + 3}$

$= \sqrt{4}$

$= 2$

Vastaus a) 0 b) 2

133

a) $2x^2 = 2 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 = 2 \cdot 5 = 10$

b) $2x^2 = 2 \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 2 \cdot 3^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \cdot 9 \cdot 2 = 36$

Vastaus a) 10 b) 36

134

a) $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

b) $\sqrt{6\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{24+1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

c) $\sqrt{1+\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{16+9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

135

a) $4\sqrt{12}\sqrt{3} = 4\sqrt{12 \cdot 3} = 4 \cdot \sqrt{36} = 4 \cdot 6 = 24$

b) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$

c) $\dfrac{\sqrt{6}\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6 \cdot 3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{6 \cdot 3}{2}} = \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{9} = 3$

136

a) $\sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3}$

$= \sqrt{100} \cdot \sqrt{3}$

$= 10\sqrt{3} \approx 10 \cdot 1,732 = 17,32$

b) $\sqrt{30\ 000} = \sqrt{10\ 000 \cdot 3}$

$= \sqrt{10\ 000} \cdot \sqrt{3}$

$= 100\sqrt{3} \approx 100 \cdot 1,732 = 173,2$

c) $\sqrt{0,03} = \sqrt{\frac{3}{100}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{10} \approx \frac{1,732}{10} = 0,1732$

Vastaus a) 17,32 b) 173,2 c) 0,1732

137

a) $6\sqrt{2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{72}$

b) $4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}$

c) $7\sqrt{2} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98}$

Vastaus a) 72 b) 48 c) 98

138

$a = -3$

a) $3\sqrt{a^2} = 3\sqrt{(-3)^2} = 3\sqrt{9} = 3 \cdot 3 = 9$

b) $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3 \cdot (-3)^2} = \sqrt{3 \cdot 9} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{3a}\right)^2 = \left(\sqrt{3 \cdot (-3)}\right) = \left(\sqrt{-9}\right)^2$ Ei määritelty, koska $-9 < 0$.

Vastaus a) 9 b) $3\sqrt{3}$ c) ei määritelty

139

a) $\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{16\cdot 2}-\sqrt{6\cdot 2}$

$=3\sqrt{2}+4\sqrt{2}-\sqrt{12}$

$=7\sqrt{2}-\sqrt{4\cdot 3}$

$=7\sqrt{2}-\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}$

$=7\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{2}\cdot\left(4\sqrt{5}-2\sqrt{10}\right)=3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{5}-3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{10}$

$=3\cdot 4\cdot\sqrt{2\cdot 5}-3\cdot 2\cdot\sqrt{2\cdot 10}$

$=12\sqrt{10}-6\sqrt{4\cdot 5}$

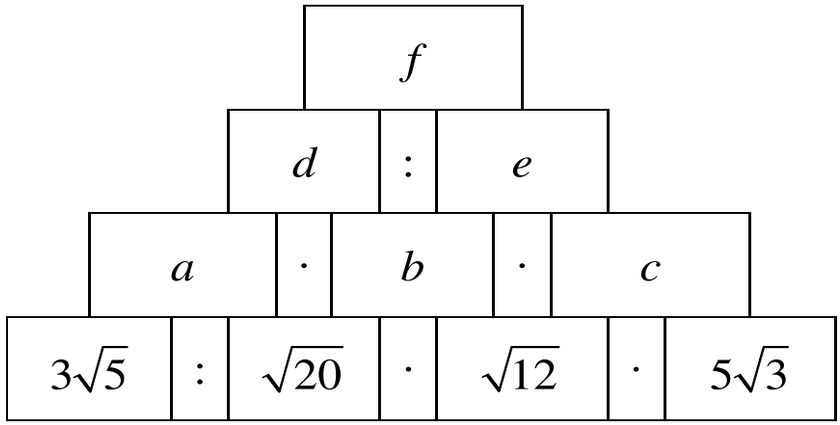
$=12\sqrt{10}-6\sqrt{4}\sqrt{5}$

$=12\sqrt{10}-6\cdot 2\sqrt{5}$

$=12\sqrt{10}-12\sqrt{5}$

Vastaus a) $7\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ b) $12\sqrt{10}-12\sqrt{5}$

140



$$a = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{4 \cdot 5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$$

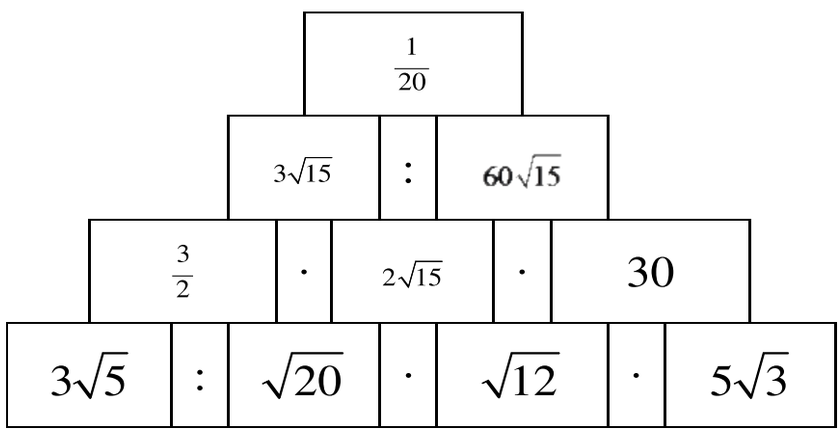
$$b = \sqrt{20} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{20 \cdot 12} = \sqrt{4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{4^2 \cdot 15} = 2\sqrt{15}$$

$$c = \sqrt{12} \cdot 5\sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{12 \cdot 3} = 5 \cdot \sqrt{36} = 5 \cdot 6 = 30$$

$$d = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{15} = 3\sqrt{15}$$

$$e = 2\sqrt{15} \cdot 30 = 60\sqrt{15}$$

$$f = \frac{3\sqrt{15}}{60\sqrt{15}} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$



Vastaus $\frac{1}{20}$

141

a) $\sqrt{7^3} = \sqrt{7^2 \cdot 7} = 7\sqrt{7}$

b) $\sqrt{3^8} = \sqrt{3^{4 \cdot 2}} = \sqrt{(3^4)^2} = \left|\underbrace{3^4}_{\geq 0}\right| = 3^4 = 81$

c) $\sqrt{3^5} = \sqrt{3^4 \cdot 3} = \sqrt{3^{2 \cdot 2} \cdot 3} = \sqrt{(3^2)^2 \cdot 3}$

$= \sqrt{(3^2)^2} \cdot \sqrt{3} = \left|\underbrace{3^2}_{\geq 0}\right| \sqrt{3} = 3^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

Vastaus a) $7\sqrt{7}$ b) 81 c) $9\sqrt{3}$

142

a) $$\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{4\cdot 2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5$$

b) $$\overset{2)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \overset{4)}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{4\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

c) $$\frac{\sqrt{50}}{4} + \frac{\sqrt{72}}{8} = \frac{\sqrt{25\cdot 2}}{4} + \frac{\sqrt{36\cdot 2}}{8} = \overset{2)}{\frac{5\sqrt{2}}{4}} + \frac{6\sqrt{2}}{8}$$

$$= \frac{10\sqrt{2}}{8} + \frac{6\sqrt{2}}{8} = \frac{10\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{8}$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{8} = 2\sqrt{2}$$

Vastaus a) 5 b) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $2\sqrt{2}$

143

$$5\sqrt{3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$$

$$6\sqrt{2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{72}$$

Luvut suuruusjärjestyksessä pienimmästä alkaen ovat

$$6\sqrt{2},\ \sqrt{73},\ 5\sqrt{3}$$

144

a) $x = \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 4 &= 2\left(\sqrt{3}\right)^2 - 5 \cdot \sqrt{3} + 4 \\ &= 2 \cdot 3 - 5\sqrt{3} + 4 \\ &= 10 - 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

b) $x = -2\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 4 &= 2\left(-2\sqrt{5}\right)^2 - 5\left(-2\sqrt{5}\right) + 4 \\ &= 2 \cdot (-2)^2 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 + 10\sqrt{5} + 4 \\ &= 2 \cdot 4 \cdot 5 + 10\sqrt{5} + 4 \\ &= 40 + 10\sqrt{5} + 4 \\ &= 44 + 10\sqrt{5} \end{aligned}$$

Vastaus a) $10 - 5\sqrt{3}$ b) $44 + 10\sqrt{5}$

145

a) $\sqrt{12a} \cdot \sqrt{3a} = \sqrt{12a \cdot 3a}$

$= \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a^2}$

$= \sqrt{4 \cdot 9 \cdot a^2}$

$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}\sqrt{a^2}$

$= 2 \cdot 3 \cdot |a| \qquad | \, a > 0$

$= 6a$

b) $\dfrac{\sqrt{5a} \cdot \sqrt{10a^5}}{\sqrt{2a}} = \dfrac{\sqrt{5a \cdot 10a^5}}{\sqrt{2a}}$

$= \sqrt{\dfrac{5\cancel{a} \cdot 10a^5}{2\cancel{a}}}$

$= \sqrt{25a^5}$

$= \sqrt{25} \cdot \sqrt{a^4 \cdot a}$

$= 5\sqrt{a^4} \cdot \sqrt{a}$

$= 5\sqrt{(a^2)^2}\sqrt{a}$

$= 5|a^2|\sqrt{a} \qquad | \, a^2 > 0$

$= 5a^2\sqrt{a}$

Vastaus a) $6a$ b) $5a^2\sqrt{a}$

146

a) $\sqrt{8a} \cdot \sqrt{5a^2} \cdot \sqrt{10a^3} = \sqrt{8a \cdot 5a^2 \cdot 10a^3}$

$= \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot a^6}$

$= \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot (a^3)^2}$

$= \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{5^2} \sqrt{(a^3)^2}$

$= 4 \cdot 5 \cdot |a^3| \qquad | \; a^3 \geq 0$

$= 20a^3$

b) $\sqrt{20a\sqrt{25a^2}} = \sqrt{20a \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{a^2}}$

$= \sqrt{20a \cdot 5 \cdot |a|} \quad | \; a \geq 0$

$= \sqrt{20a \cdot 5a}$

$= \sqrt{100a^2}$

$= \sqrt{100} \cdot \sqrt{a^2}$

$= 10|a| \qquad | \; a \geq 0$

$= 10a$

Vastaus a) $20a^3$ b) $10a$

147

a) Väite: $\sqrt{7^{104}} = 7^{52}$

Todistus: 1) $7^{52} \geq 0$

2) $(7^{52})^2 = 7^{52 \cdot 2} = 7^{104}$

Kohtien 1 ja 2 perusteella $\sqrt{7^{104}} = 7^{52}$. □

b) Väite: $\sqrt{(-3)^{314}} = 3^{157}$

Todistus: 1) $3^{157} \geq 0$

2) $(3^{157})^2 = 3^{157 \cdot 2} = 3^{314} = (-3)^{314}$

Kohtien 1 ja 2 perusteella $\sqrt{(-3)^{314}} = 3^{157}$. □

148

Oletus: $a \geq 0,\ b > 0$

Väite: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Todistus: Osoitetaan väite todeksi käyttämällä neliöjuuren määritelmää.

1) $\frac{\overbrace{\sqrt{a}}^{\geq 0}}{\underbrace{\sqrt{b}}_{> 0}} \geq 0$

2) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$

Kohtien 1 ja 2 perusteella $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. □

149

a) $\frac{6}{\sqrt{3}} \overset{\sqrt{3})}{=} \frac{6\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}$

$= \frac{\overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{3}}{\cancel{3}}$

$= 2\sqrt{3}$

b) $\frac{5}{\sqrt{5}} \overset{\sqrt{5})}{=} \frac{5\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}$

$= \frac{\cancel{5}\sqrt{5}}{\cancel{5}}$

$= \sqrt{5}$

c) $\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \overset{\sqrt{2})}{=} \frac{10\sqrt{2}\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}$

$= \frac{\overset{5}{\cancel{10}}\sqrt{2\cdot 5}}{\cancel{2}}$

$= 5\sqrt{10}$

150

Väite: $\sqrt{28-10\sqrt{3}} = 5-\sqrt{3}$

Todistus: Osoitetaan väite todeksi käyttämällä neliöjuuren määritelmää.

1) $5-\sqrt{3} = \sqrt{25}-\sqrt{3} \geq 0$

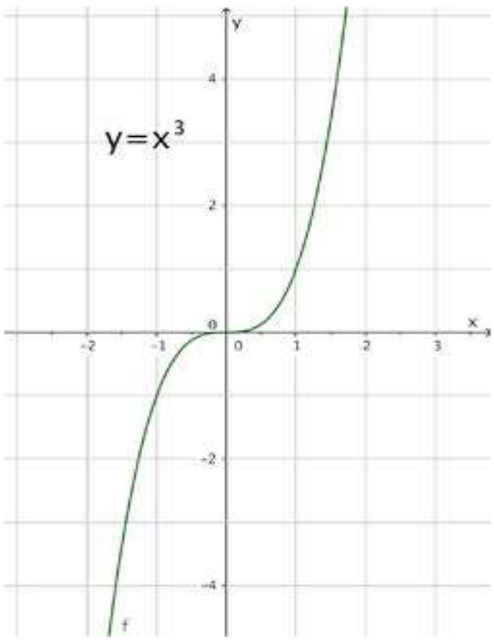
2) $\left(5-\sqrt{3}\right)^2 = 5^2 + 2\cdot 5\cdot\left(-\sqrt{3}\right) + (-\sqrt{3})^2$

$= 25 - 10\sqrt{3} + 3$

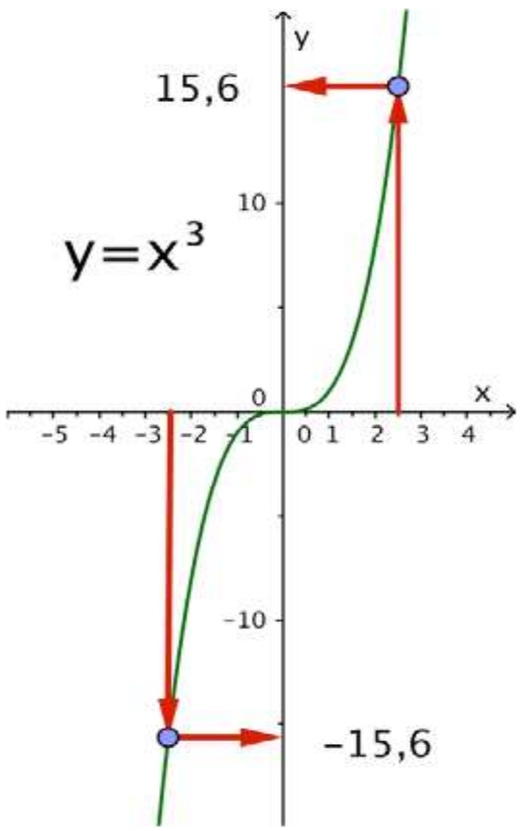
$= 28 - 10\sqrt{3}$

Kohtien 1 ja 2 perusteella $\sqrt{28-10\sqrt{3}} = 5-\sqrt{3}$. $\square$

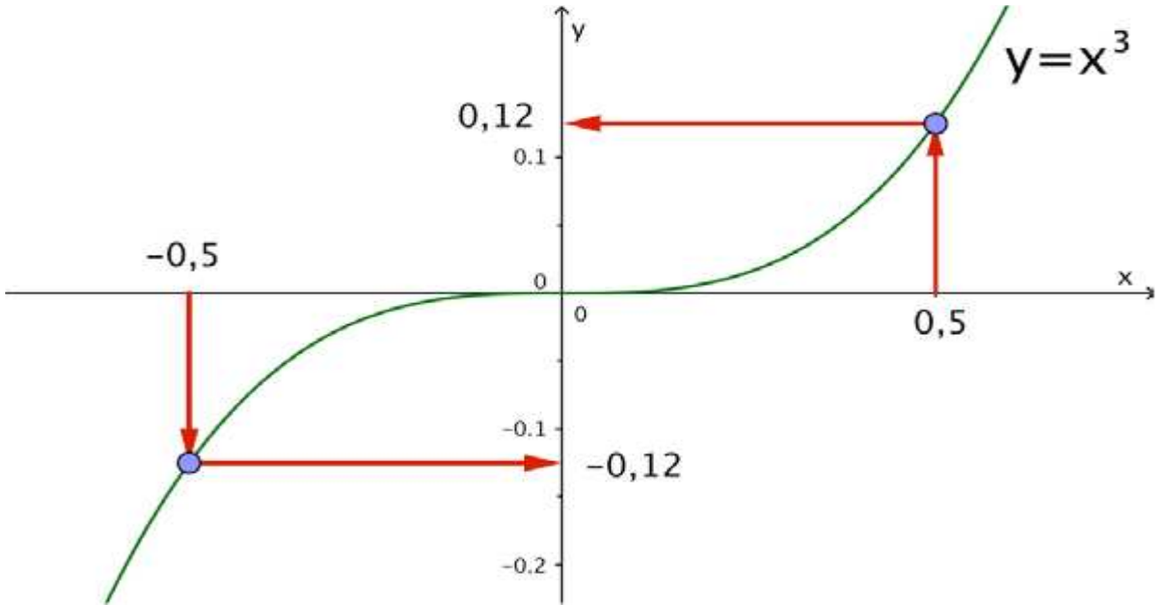
151



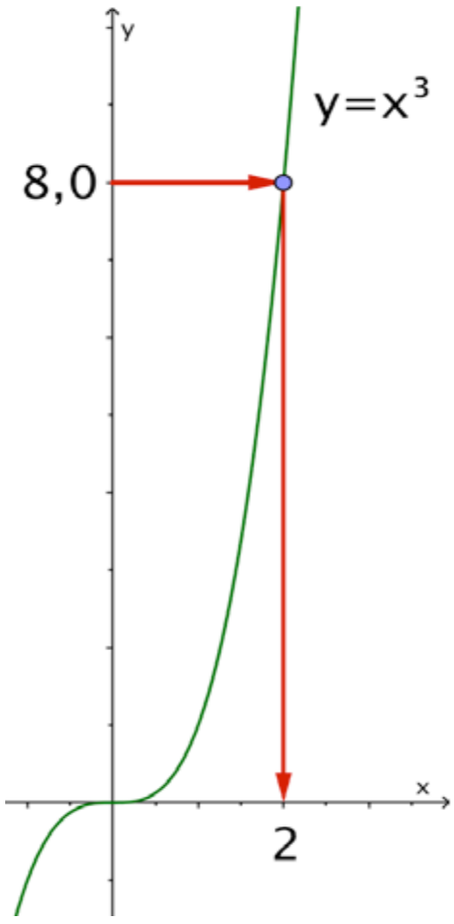
a) $f(-2,5) \approx -15,6$, $f(2,5) \approx 15,6$



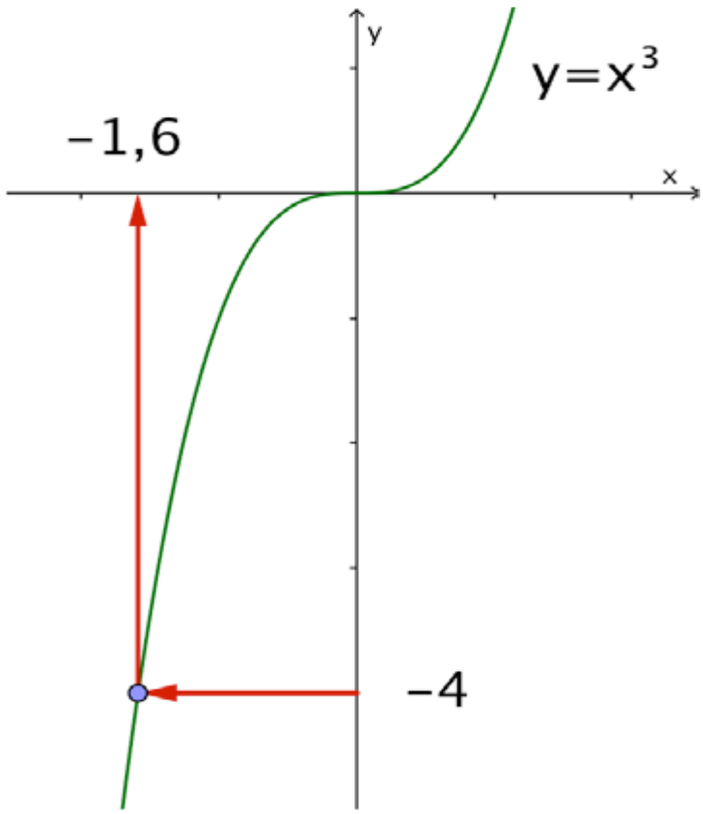
b) $f(-0,5) \approx -0,1$, $f(0,5) \approx 0,1$



c) $f(2) \approx 8,0$



d) $x^3 = -4$, kun $x \approx -1{,}6$



Vastaus

a) $f(-2{,}5) \approx -15{,}6$, $f(2{,}5) \approx 15{,}6$

b) $f(-0{,}5) \approx -0{,}1$, $f(0{,}5) \approx 0{,}1$

c) $f(2) \approx 8{,}0$

d) $x^3 = -4$, kun $x \approx -1{,}6$

152

a) $\sqrt[7]{-35} = -1,6618... \approx -1,662$

b) $\sqrt[6]{34} = 1,7998... \approx 1,800$

c) Parillinen juuri $\sqrt[4]{-625}$ ei ole määritelty, koska $-625 < 0$.

d) $\sqrt[5]{5} = 1,3797... \approx 1,380$

153

a) Parillinen juuri $\sqrt[6]{4096} = 4$, koska $4 \geq 0$ ja $4^6 = 4096$.

Yhtälön $x^6 = 4096$ toteuttavat arvot $x = -4$ ja $x = 4$,
koska $(\pm 4)^6 = 4096$.

b) Parillinen juuri $\sqrt[6]{-4096}$ ei ole määritelty, koska $-4096 < 0$.

Yhtälöllä $x^6 = -4096$ ei ole ratkaisua, koska $x^6 \geq 0$ aina.

c) Pariton juuri $\sqrt[7]{128} = 2$ koska $2^7 = 128$.

Yhtälön $x^7 = 128$ toteuttaa arvo $x = 2$, koska $2^7 = 128$.

d) Pariton juuri $\sqrt[7]{-128} = -2$ koska $(-2)^7 = -128$.

Yhtälön $x^7 = -128$ toteuttaa arvo $x = -2$, koska $(-2)^7 = -128$.

Vastaus
a) $\sqrt[6]{4096} = 4$, luvut -4 ja 4
b) ei ole määritelty, mikään luku ei toteuta yhtälöä
c) $\sqrt[7]{128} = 2$, luku 2 toteuttaa
d) $\sqrt[7]{-128} = -2$, luku -2 toteuttaa

154

a) $7x^4 = 56 \qquad |:7$

$x^4 = 8$

$x = -\sqrt[4]{8} \text{ tai } x = \sqrt[4]{8}$

b) $x^7 - 28 = 0$

$x^7 = 28$

$x = \sqrt[7]{28}$

c) $3x^8 - 21 = 0$

$3x^8 = 21 \qquad |:3$

$x^8 = 7$

$x = -\sqrt[8]{7} \text{ tai } x = \sqrt[8]{7}$

d) $10x^3 + 170 = 0$

$$10x^3 = -170 \qquad |:10$$

$$x^3 = -17$$

$$x = \sqrt[3]{-17} \qquad \left(= -\sqrt[3]{17}\right)$$

Vastaus

a) $x = -\sqrt[4]{8}$ tai $x = \sqrt[4]{8}$

b) $x = \sqrt[7]{28}$

c) $x = -\sqrt[8]{7}$ tai $x = \sqrt[8]{7}$

d) $x = \sqrt[3]{-17} = -\sqrt[3]{17}$

155

$a_1 = 1, \quad a_9 = 6561$

a) $a_9 = a_1 \cdot q^{9-1} \qquad \left| a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \right.$

$6561 = 1 \cdot q^8$

$q^8 = 6561$

$q = \pm\sqrt[8]{6561}$

$q = \pm 3$

$q = -3$ tai $q = 3$

b) $a_3 = a_1 \cdot q^{3-1}$

$= 1 \cdot (\pm 3)^2$

$= 9$

Vastaus a) $q = -3$ tai $q = 3$

b) $a_3 = 9$

156

$a_4 = 1000, \quad a_7 = 64$

a) $a_7 = a_4 \cdot q^{7-4}$

$64 = 1000 \cdot q^3$

$q^3 = \frac{64}{1000}$

$q = \sqrt[3]{\frac{64}{1000}}$

$q = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{1000}}$

$q = \frac{4}{10}$

$q = \frac{2}{5}$

b) $a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$

$1000 = a_1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3$

$1000 = \frac{8}{125} a_1 \qquad \left| \cdot \frac{125}{8} \right.$

$a_1 = 1000 \cdot \frac{125}{8}$

$a_1 = \frac{\overset{125}{\cancel{1000}} \cdot 125}{\cancel{8}}$

$a_1 = 125^2$

$a_1 = 15\ 625$

Vastaus a) $q = \frac{2}{5} = 0,4$

b) $a_1 = 15\ 625$

157

Alkupääoma 3600 euroa.
Vuodessa talletus tulee *k*-kertaiseksi.
Loppupääoma 6000 euroa.
Talletusaika 7 vuotta, oletetaan, että talletus tehty kalenterivuoden alussa, jolloin korko maksetaan tasavuosin aina kalenterivuoden lopussa.

Muodostetaan yhtälö.

$$k^7 \cdot 3600\ € = 6000\ € \qquad \big| : 3600\ €$$

$$k^7 = \frac{6000\ \cancel{€}}{3600\ \cancel{€}}$$

$$k = \sqrt[7]{\frac{6000}{3600}}$$

$$k = 1{,}0757...$$

$$k \approx 1{,}076$$

Talletus tulee vuodessa 1,076-kertaiseksi, joten se on 107,6 % edellisen vuoden lopun pääomasta. Vuotuinen korkoprosentti on 107,6 % - 100 % = 7,6 %.

Vastaus Vuosikorko on 7,6 %.

158

Alkuperäinen hinta 422 euroa.
Kuukaudessa myyntihinta tulee k-kertaiseksi.
Lopullinen hinta 211 euroa.
Aikajakso 6 kuukautta.

Muodostetaan yhtälö.

$$k^6 \cdot 422\ € = 211\ € \qquad \big| : 422\ €$$

$$k^6 = \frac{211\ \cancel{€}}{422\ \cancel{€}}$$

$$k = \pm \sqrt[6]{\frac{211}{422}} \qquad \big| \text{ kasvukerroin } k \geq 0$$

$$k = 0,8908...$$

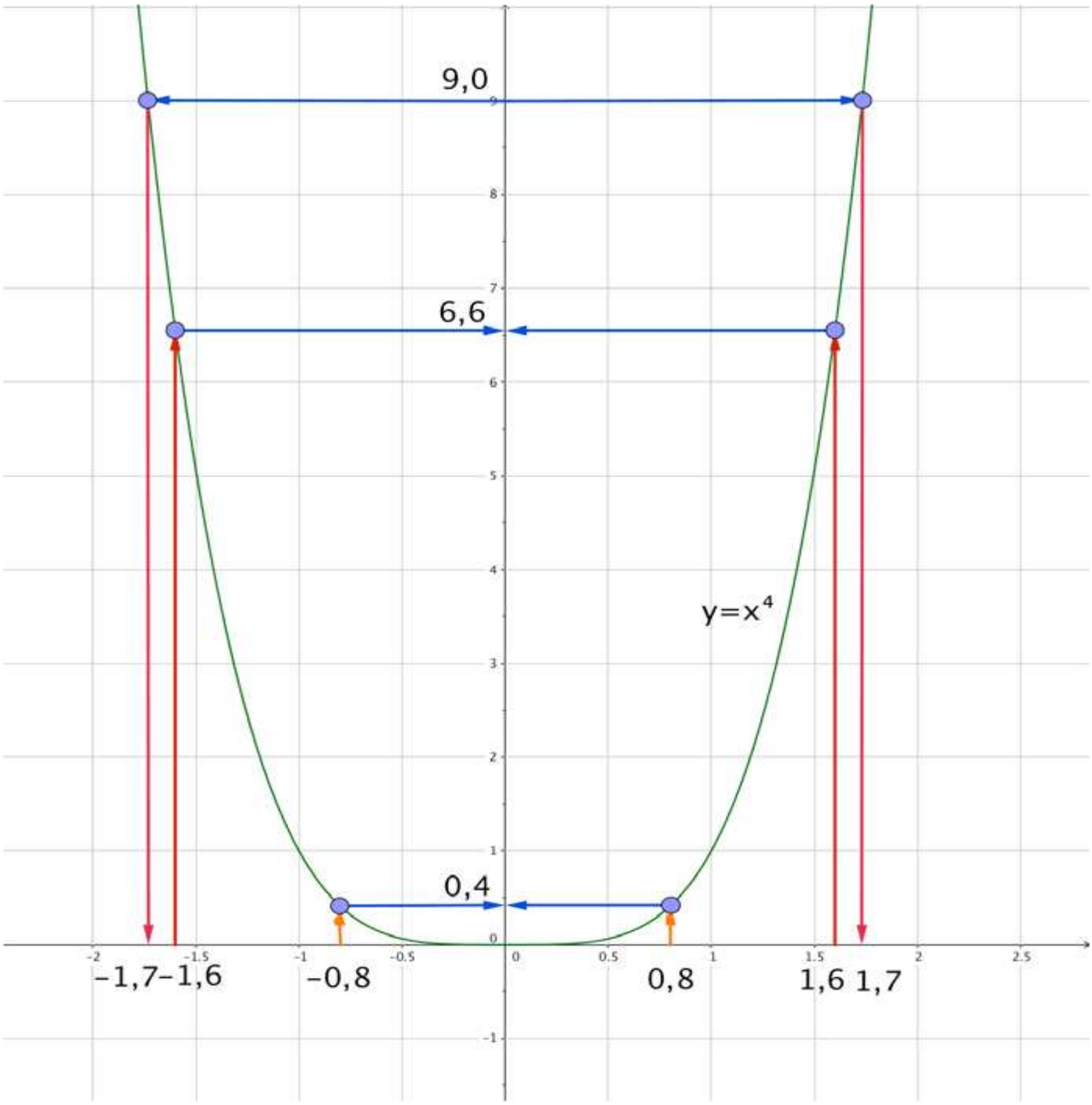
$$k \approx 0,891$$

Hinta tulee kuukaudessa 0,891-kertaiseksi, joten se on 89,1 % edellisen kuukauden hinnaasta.

Hinta laskee keskimäärin kuukaudessa 100 % − 89,1 % = 10,9 %.

Vastaus Keskimääräinen hinnan alennus kuukaudessa on 10,9 %.

159



a) $f(-1,6) = 6,6$ ja $f(1,6) \approx 6,6$

b) $f(-0,8) \approx 0,4$ ja $f(0,8) \approx 0,4$

c) $x^4 = 9$, kun $x \approx -1,7$ tai $x \approx 1,7$

160

a) $\sqrt[4]{64} = 2,8284... \approx 2,828$

b) $\sqrt[5]{-32\ 768} = -8 = -8,000$

c) $\sqrt[3]{12} = 2,2894... \approx 2,289$

d) Parillinen juuri $\sqrt[6]{-729}$ ei ole määritelty, koska $-729 < 0$.

Vastaus

a) $\sqrt[4]{64} \approx 2,828$

b) $\sqrt[5]{-32\ 768} = -8,000$

c) $\sqrt[3]{12} \approx 2,289$

d) ei määritelty

161

a) $16x^4 = 32 \qquad | : 16$

$x^4 = 2$

$x = \pm\sqrt[4]{2}$

$x = -\sqrt[4]{2}$ tai $x = \sqrt[4]{2}$

b) $3x^7 - 150 = 0$

$3x^7 = 150 \qquad | : 3$

$x^7 = 50$

$x = \sqrt[7]{50}$

c) $6x^5 + 42 = 0$

$6x^5 = -42 \qquad | : 6$

$x^5 = -7$

$x = \sqrt[5]{-7} \quad \left(= -\sqrt[5]{7}\right)$

Vastaus a) $x = -\sqrt[4]{2}$ tai $x = \sqrt[4]{2}$

b) $x = \sqrt[7]{50}$

c) $x = \sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7}$

162

a) $(x-2)^3 = 0$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

b) $(x-2)^3 = 27$

$x - 2 = \sqrt[3]{27}$ $\quad \left| \sqrt[3]{27} = 3 \right.$

$x = 3 + 2$

$x = 5$

c) $(x-2)^3 = 5$

$x - 2 = \sqrt[3]{5}$

$x = \sqrt[3]{5} + 2$

Vastaus a) $x = 2$
b) $x = 5$
c) $x = \sqrt[3]{5} + 2$

163

$a_1 = 16$ ja $a_5 = 81$

Selvitetään geometrisen jonon suhdeluku q.

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} \qquad \left| \; a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \right.$$

$$81 = 16 \cdot q^4$$

$$q^4 = \frac{81}{16}$$

$$q = \pm\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$$

$$q = \pm\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}$$

$$q = \pm\frac{3}{2}$$

Saatiin kaksi mahdollista arvoa suhdeluvulle, $q = -\frac{3}{2}$ tai $q = \frac{3}{2}$.
Lasketaan kysytty summa S_5 erikseen kummallakin saadulla q:n arvolla käyttäen geometrisen summan kaavaa $S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$.

$q = -\frac{3}{2}$: $\quad S_5 = \frac{16 \cdot \left(1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^5\right)}{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)} = 55 \quad \Big| \begin{matrix} a_1 = 16 \\ n = 5 \end{matrix}$

$q = \frac{3}{2}$: $\quad S_5 = \frac{16 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^5\right)}{1 - \frac{3}{2}} = 211 \quad \Big| \begin{matrix} a_1 = 16 \\ n = 5 \end{matrix}$

Vastaus $\quad S_5 = 55$, kun $q = -\frac{3}{2}$ ja

$S_5 = 211$, kun $q = \frac{3}{2}$

164

$a_{13} = 3$ ja $a_{20} = 2$

Selvitetään geometrisen jonon suhdeluku q.

$$a_{20} = a_{13} \cdot q^{20-13}$$

$$2 = 3 \cdot q^7$$

$$q^7 = \frac{2}{3}$$

$$q = \sqrt[7]{\frac{2}{3}}$$

Lasketaan kysytty summa $S = a_{13} + a_{14} + ... + a_{20}$ käyttäen geometrisen summan kaavaa $S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$.

Huomataan, että kysytyssä summassa on kahdeksan (8) termiä.

Valitaan $a_1 = 3\ (= a_{13})$, $n = 8$ ja $q = \sqrt[7]{\frac{2}{3}}$.

$$S = \frac{3 \cdot \left(1 - \left(\sqrt[7]{\frac{2}{3}} \right)^8 \right)}{1 - \sqrt[7]{\frac{2}{3}}} = 19,768... \approx 19,77$$

Vastaus Summa on 19,77.

165

Vuosi	Väkiluku (miljardia)
1800	0,98
1960	3,02
1980	4,44
2000	6,12
2010	6,91

Merkitään väkiluvun vuotuista kasvukerrointa kussakin kohdassa kirjaimella k.

a) $k^{2010-1800} \cdot 0,98 = 6,91$

$$k^{210} = \frac{6,91}{0,98}$$

$$k = \pm\sqrt[210]{7,051...} \qquad \big| \text{ kasvukerroin } k \geq 0$$

$$k = 1,0093...$$

$$k \approx 1,009$$

Väkiluku kasvoi keskimäärin 100,9 % - 100 % = 0,9 % vuodessa.

b) $k^{1980-1960} \cdot 3,02 = 4,44$

$$k^{20} = \frac{4,44}{3,02}$$

$$k = \pm\sqrt[20]{1,470...} \qquad \big| \text{ kasvukerroin } k \geq 0$$

$$k = 1,0194...$$

$$k \approx 1,019$$

Väkiluku kasvoi keskimäärin 101,9 % - 100 % = 1,9 % vuodessa.

c) $k^{2010-2000} \cdot 6,12 = 6,91$

$$k^{10} = \frac{6,91}{6,12}$$

$$k = \pm\sqrt[10]{1,129...} \qquad \big| \text{ kasvukerroin } k \geq 0$$

$$k = 1,0122...$$

$$k \approx 1,012$$

Väkiluku kasvoi keskimäärin 101,2 % - 100 % = 1,2 % vuodessa.

Vastaus a) 0,9 %
b) 1,9 %
c) 1,2 %

166

Vuonna 1987 radioaktiivisuus 78 kBq/m^2
Vuonna 2006 radioaktiivisuus 51 kBq/m^2

Radioaktiivisuus tulee vuodessa k-kertaiseksi.
Muodostetaan yhtälö ja selvitetään kerroin k.

$$k^{2006-1987} \cdot 78 = 51$$

$$k^{19} = \frac{51}{78}$$

$$k = \sqrt[19]{\frac{51}{78}}$$

Vuoden 2016 radioaktiivisuus A saadaan yhtälöstä $A = k^{2016-1987} \cdot 78$.

$$A = k^{2016-1987} \cdot 78 = \left(\sqrt[19]{\frac{51}{78}} \right)^{29} \cdot 78 = 40,7... \approx 41$$

Vastaus Radioaktiivisuus vuonna 2016 on 41 kBq/m^2.

167

a) $\sqrt[2]{4 \cdot 5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20} = 4,47... \approx 4,5$

b) $\sqrt[3]{4 \cdot 5 \cdot 6} = \sqrt[3]{120} = 4,93... \approx 4,9$

c) $\sqrt[4]{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \sqrt[4]{840} = 5,38... \approx 5,4$

Vastaus a) 4,5
b) 4,9
c) 5,4

168

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

$$ab = x^2 \qquad \left| \begin{array}{l} a > 0,\ b > 0,\ \text{joten} \\ \\ \text{myös}\ \ ab > 0 \end{array} \right.$$

$$x = \pm\sqrt{ab}$$

Kysytty luku x on positiivinen, joten $x = \sqrt{ab}$.

Vastaus $x = \sqrt{ab}$

Kahden positiivisen luvun keskiverto on yhtä suuri kuin kahden positiivisen luvun geometrinen keskiarvo.

169

Aika	Osakkeen arvon muutos
1. vuosineljännes	
tammikuu	+10,7 %
helmikuu	+3,3 %
maaliskuu	+1,0 %
2. vuosineljännes	
huhtikuu	+2,3 %
toukokuu	+16,2 %
kesäkuu	-18,5 %

a) Osakkeen arvo tulee vuodessa keskimäärin *k*-kertaiseksi, jossa $k = 100\ \% + 4,9\ \% = 104,9\ \% = 1,049$.

Kasvukerroin *k* on saatu ratkaisemalla yhtälö

$k^3 \cdot A = 1,107 \cdot 1,033 \cdot 1,010 \cdot A$, josta saadaan

$$k = \sqrt[3]{1,107 \cdot 1,033 \cdot 1,010} = \sqrt[3]{1,154...} = 1,0491... \approx 1,049$$

Luku *A* on osakkeen alkuarvo.
Kasvukerroin *k* on siis geometrinen keskiarvo.

b) $k^3 \cdot A = 1{,}023 \cdot 1{,}162 \cdot 0{,}815 \cdot A \qquad | : A$

$k^3 = 1{,}023 \cdot 1{,}162 \cdot 0{,}815$

$k^3 = 0{,}9688...$

$k = \sqrt[3]{0{,}9688..}$

$k = 0{,}9894...$

$k \approx 0{,}989$

Osakkeen arvo tuli kuukaudessa keskimäärin 0,989-kertaiseksi, eli arvo oli kuun lopussa 98,9 % kuun alun arvosta. Arvo laski keskimäärin 100 % – 98,9 % = 1,1 % kuukaudessa.

Vastaus

a) Ratkaisemalla yhtälö $k^3 \cdot A = 1{,}107 \cdot 1{,}033 \cdot 1{,}010 \cdot A$ saadaan $k \approx 1{,}049$ = 104,9 %, josta keskimääräinen muutos kuukaudessa 104,9 % -100 % = 4,9 %. Kyseessä on geometrinen keskiarvo.

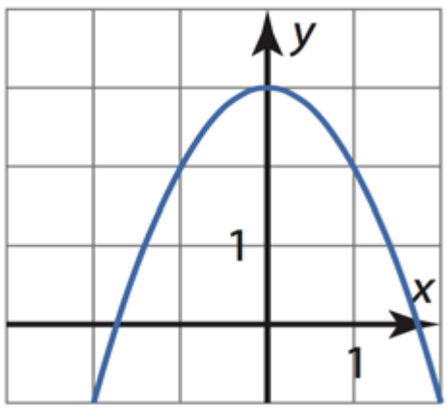
b) Osakkeen arvo laski keskimäärin 1,1 % kuukaudessa 2. vuosineljänneksellä.

170

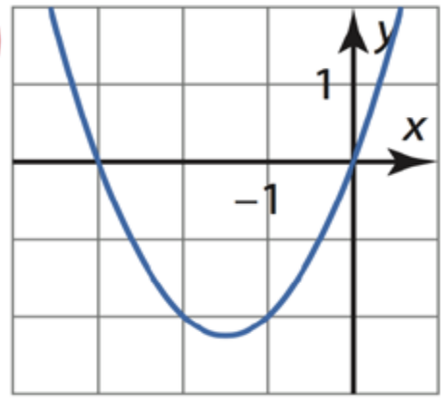
Funktion $f(x) = -x^2 + 3$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Funktion $g(x) = x^2 + 3x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

c)



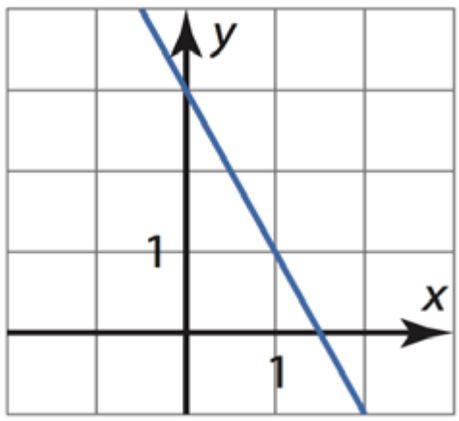
a)



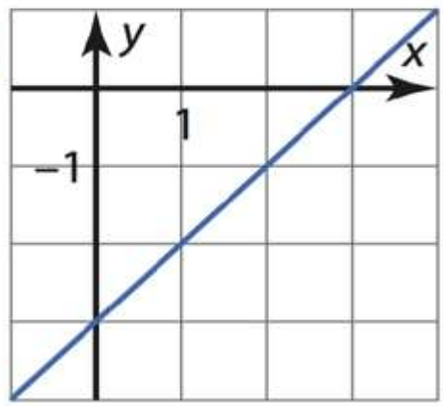
Funktion $h(x) = -2x + 3$ kuvaaja on laskeva suora.

Funktion $i(x) = x - 3$ kuvaaja on nouseva suora.

d)

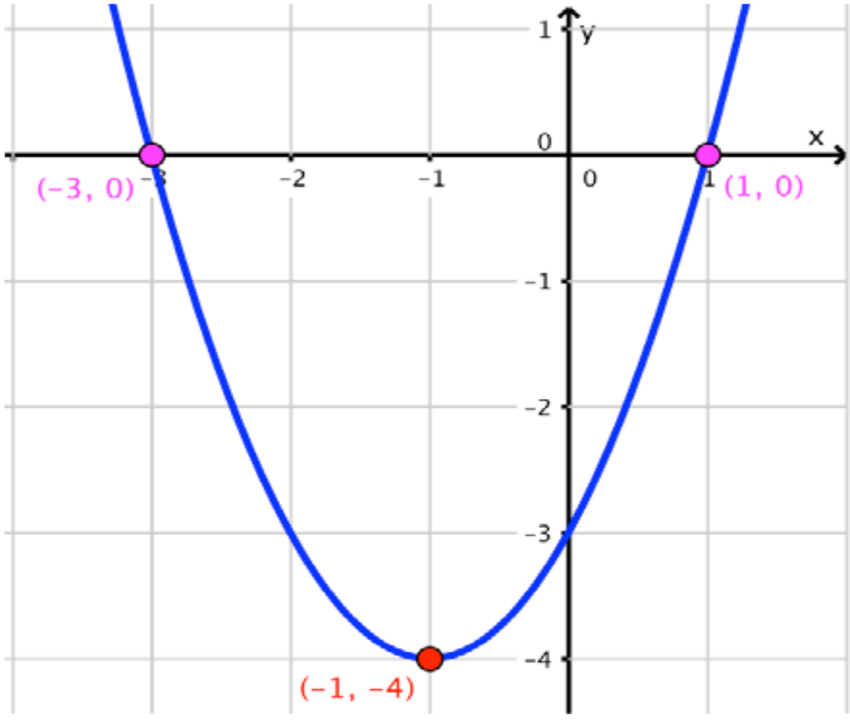


b)



Vastaus: a) $g(x)$ b) $i(x)$ c) $f(x)$ d) $h(x)$

171

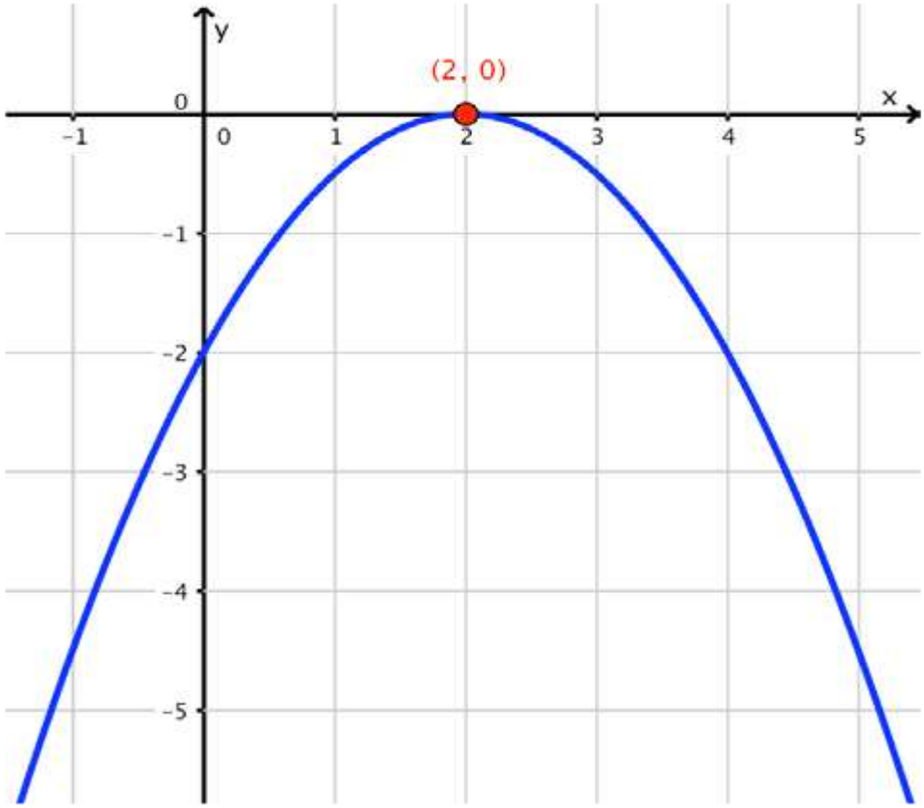


a) Huippu on pisteessä $(-1, -4)$

b) Funktion kuvaaja leikkaa x-akselin pisteissä $(-3, 0)$ ja $(1, 0)$.
Siten yhtälöllä $x^2 + 2x - 3 = 0$ on kaksi juurta, jotka ovat $x = -3$ ja $x = 1$.

Vastaus: a) $(-1, -4)$ b) kaksi juurta, $x = -3$ ja $x = 1$

172

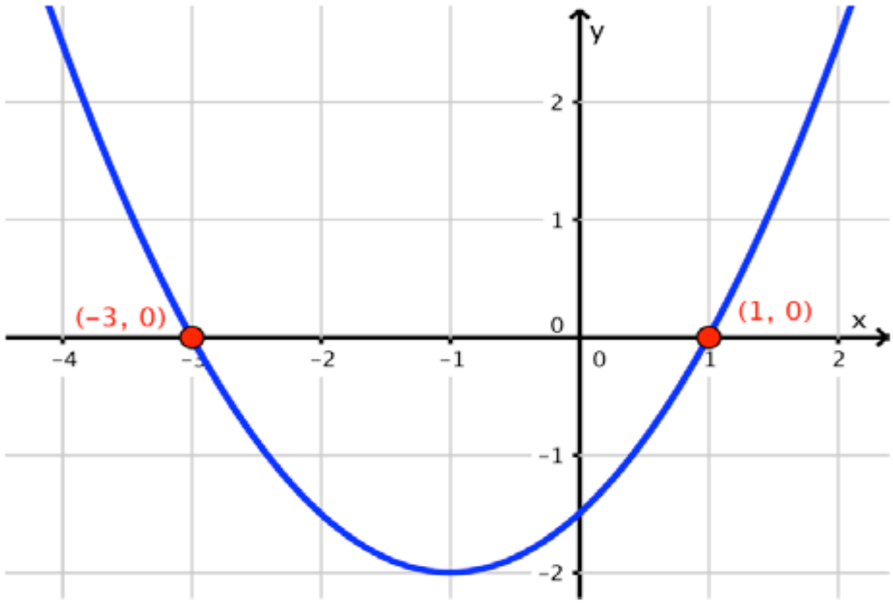


a) Huippu on pisteessä (2, 0)

b) Funktion kuvaaja sivuaa x-akselia pisteessä (2, 0). Siten yhtälöllä $x^2 + 2x - 3 = 0$ vain yksi juuri, joka on $x = 2$.

Vastaus: a) (2, 0) b) yksi juuri, $x = 2$

173



a) Funktion arvo on negatiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselin alapuolella.

Funktion g arvot ovat negatiivisia, kun $-3 < x < 1$.

b) Funktion arvo on positiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselin yläpuolella.

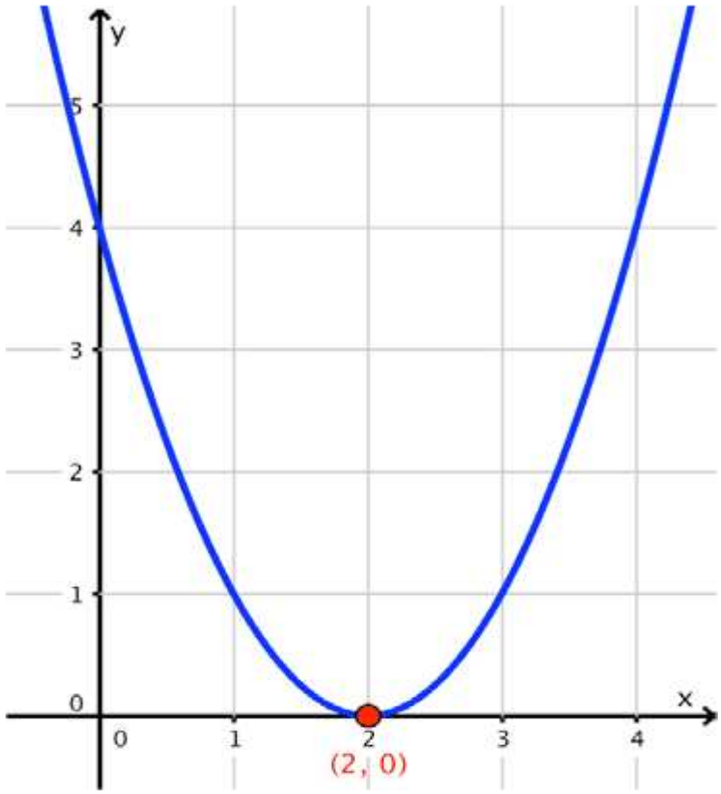
Funktion g arvot ovat positiivisia, kun $x < -3$ tai $x > 1$.

c) Funktion arvo on epänegatiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselilla tai sen yläpuolella.

Funktion g arvot ovat epänegatiivisia, kun $x \leq -3$ tai $x \geq 1$.

Vastaus: a) $-3 < x < 1$
b) $x < -3$ tai $x > 1$
c) $x \leq -3$ tai $x \geq 1$

174



a) Funktion arvo on nolla kuvaajan ja x-akselin leikkauspisteessä

Funktion g arvo on nolla, kun $x = 2$.

b) Funktion arvo on positiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselin yläpuolella.

Funktion g arvot ovat positiivisia, kun $x \neq 2$.

c) Funktion arvo on negatiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselin alapuolella.

Funktion g arvo ei ole negatiivinen millään muuttujan x arvolla.

Vastaus: a) $x = 2$ b) $x \neq 2$ c) ei millään muuttujan arvolla

175

Funktion $f(x) = -x^2 + c$ nollakohdat ovat yhtälön $-x^2 + c = 0$ ratkaisut. Sievennetään yhtälöä.

$$-x^2 + c = 0$$

$$c = x^2$$

$$x^2 = c$$

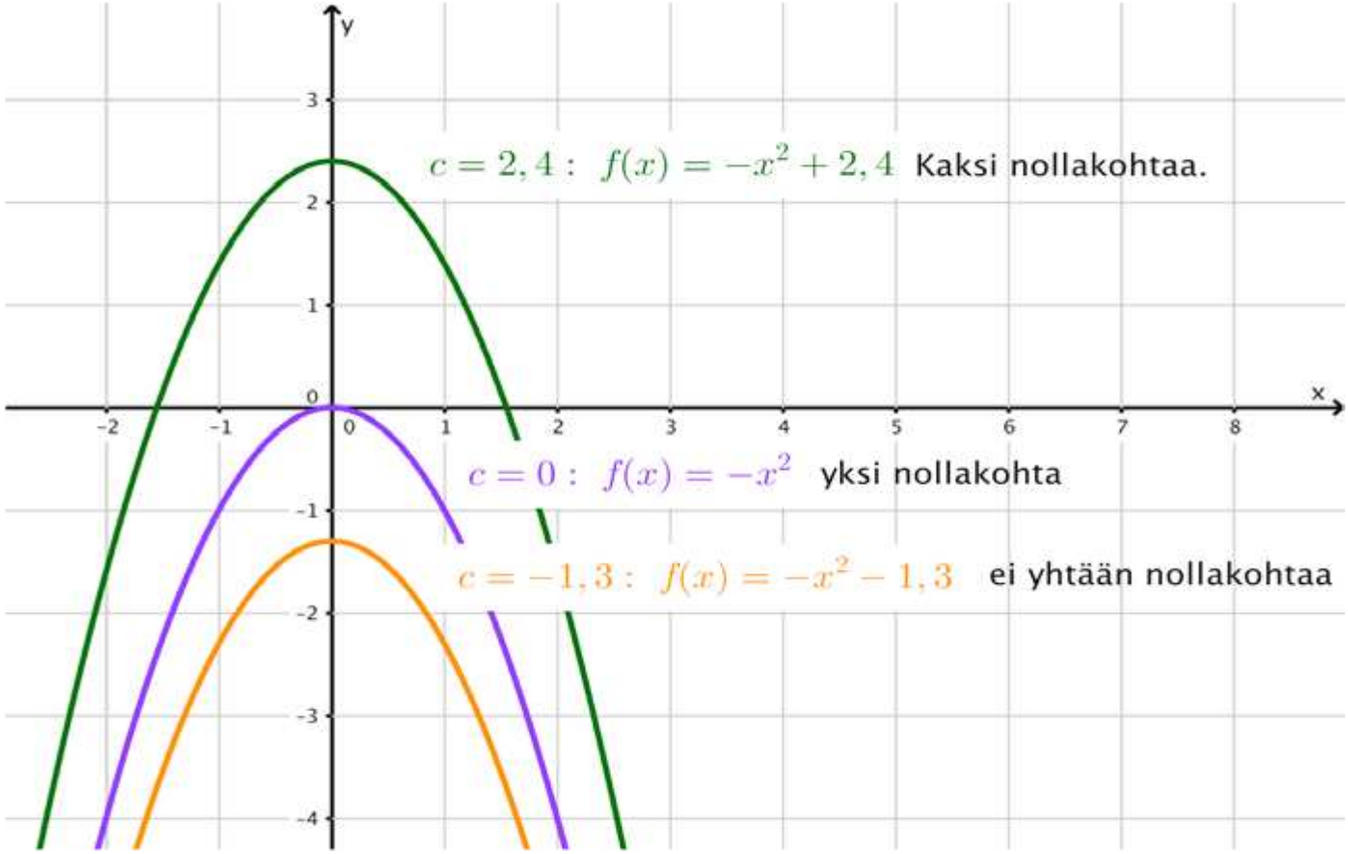
a) Yhtälöllä $x^2 = c$ on kaksi ratkaisua ($x = \sqrt{c}$ ja $x = -\sqrt{c}$), kun $c > 0$. Voidaan valita esimerkiksi $c = 2{,}4$.

b) Yhtälöllä $x^2 = c$ on yksi ratkaisu, kun $c = 0$.

c) Yhtälöllä $x^2 = c$ ei ole yhtään ratkaisua, kun $c < 0$. Voidaan valita esimerkiksi $c = -1{,}3$.

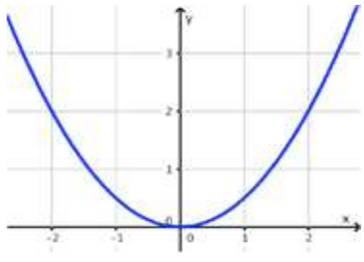
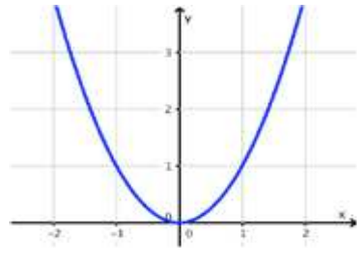
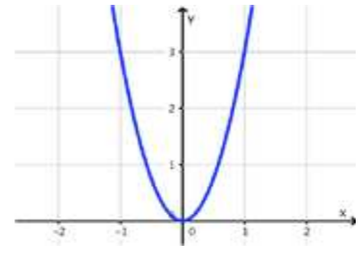
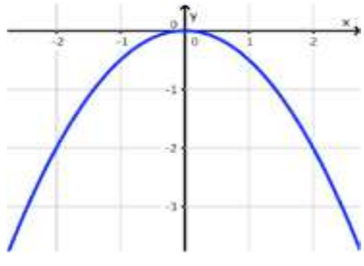
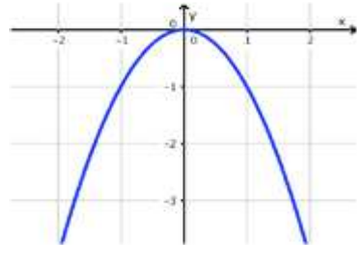
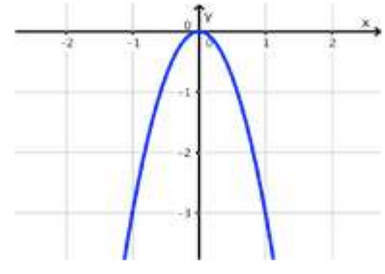
Vastaus: a) $c > 0$, esimerkiksi $c = 2{,}4$
b) $c = 0$
c) $c < 0$, esimerkiksi $c = -1{,}3$

Ratkaisun voi tarkistaa piirtämällä valittuja c:n arvoja vastaavien funktioiden kuvaajat.



176

a) Piirretään paraabelin $y = ax^2$ kuvaajia parametrin a eri arvoilla. (Geometriaohjelmassa voit käyttää myös liukusäädintä parametrille a.)

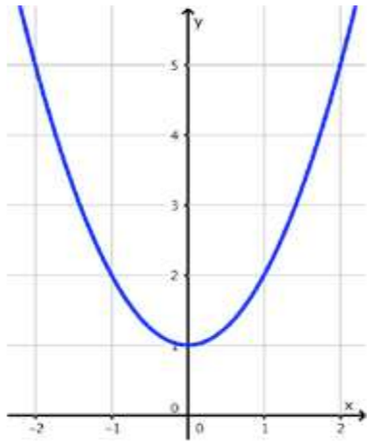
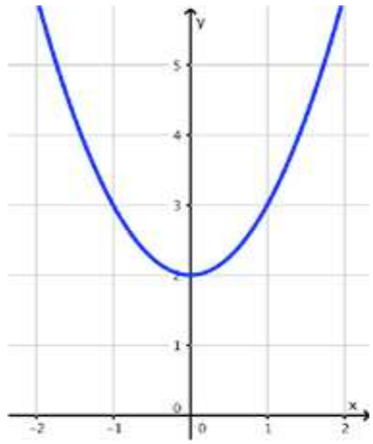
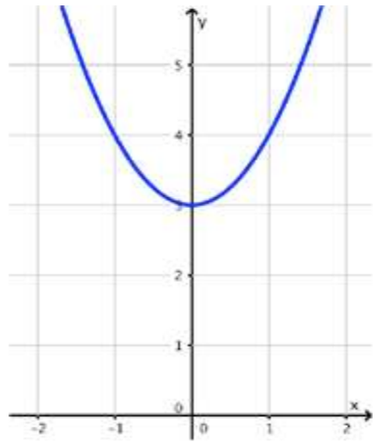
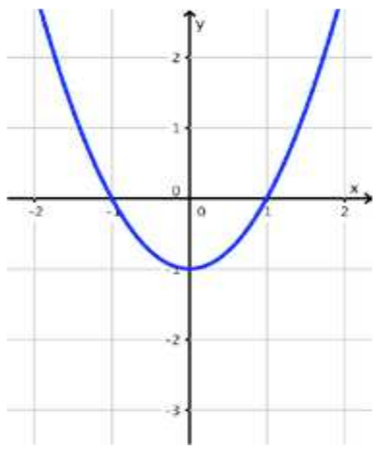
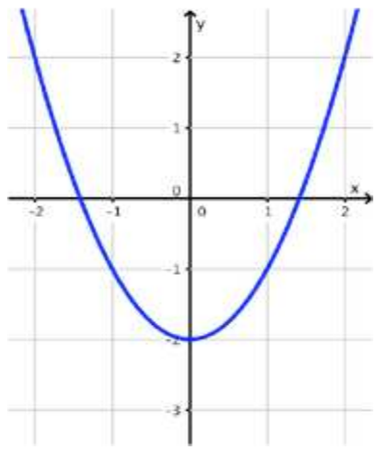
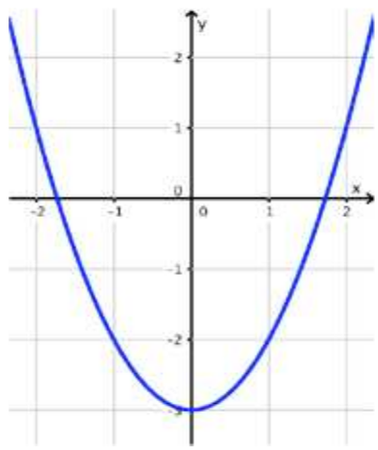
$a = 0{,}5$ 	$a = 1$ 	$a = 3$ 
$a = -0{,}5$ 	$a = -1$ 	$a = -3$ 

Paraabeli on sitä kapeampi, mitä suurempi on parametrin a itseisarvo.

Kun $a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin.

Kun $a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin.

b) Piirretään paraabelin $y = x^2 + c$ kuvaajia parametrin c eri arvoilla. (Geometriaohjelmassa voit käyttää myös liukusäädintä parametrille c.)

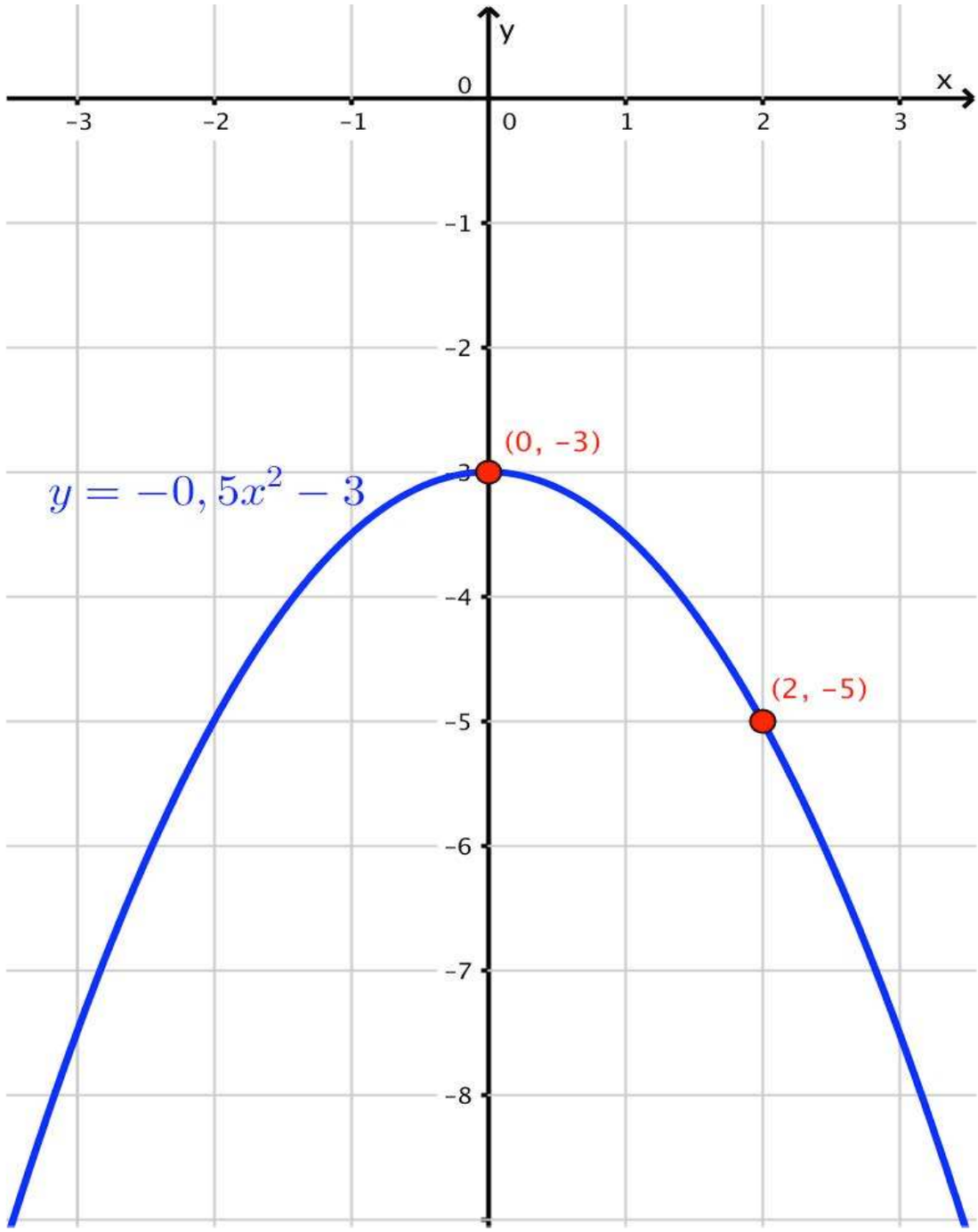
$c = 1$ 	$c = 2$ 	$c = 3$ 
$c = -1$ 	$c = -2$ 	$c = -3$ 

Paraabeli leikkaa y-akselin pisteessä $(0, c)$.

Kun parametrin c arvo kasvaa, niin paraabeli nousee ylöspäin.

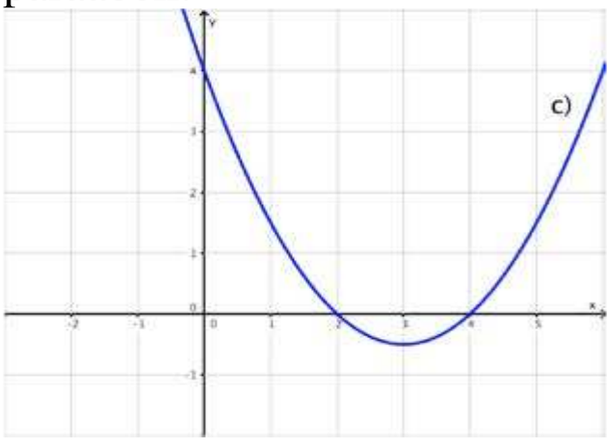
c) Geometriaohjelmalla tutkimalla kuvaajia parametrien a ja c arvoilla havaitaan, että a- ja b-kohtien havainnot ovat voimassa.

d) Piirtämällä havaitaan, että $a = -0{,}5$ ja $c = -3$.



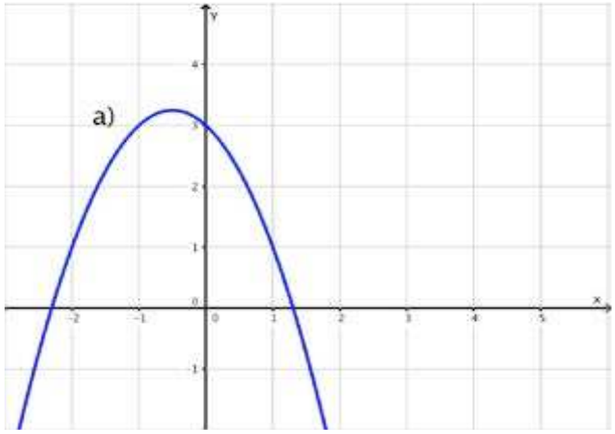
177

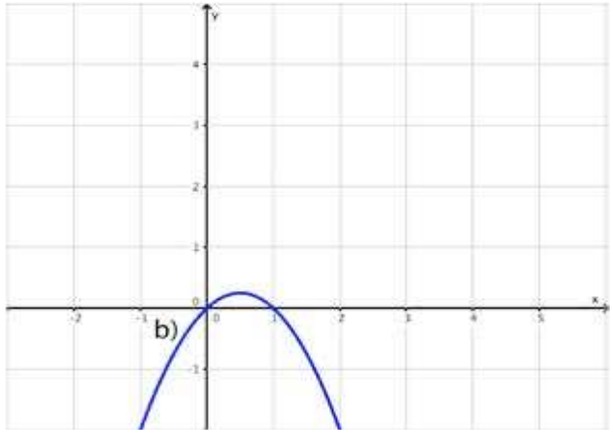
Funktion $h(x) = 0,5x^2 - 3x + 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Funktion $f(x) = -x^2 - x + 3$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Koska $f(0) = 3$, kuvaaja kulkee pisteen (0, 3) kautta.

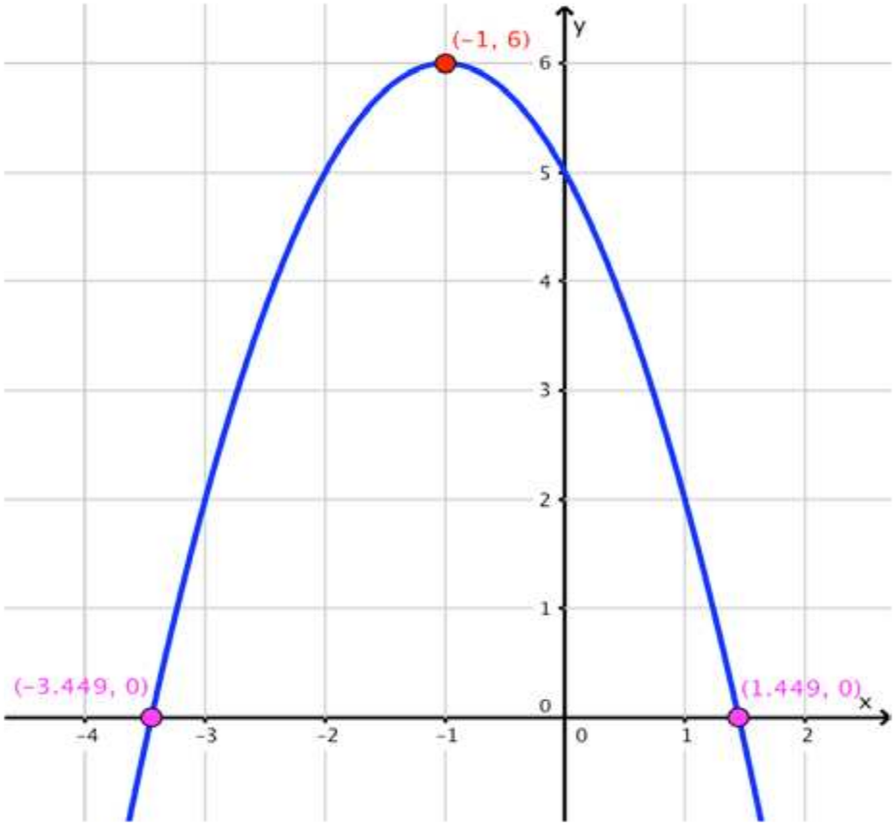
Funktion $g(x) = x - x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Koska $g(0) = 0$, kuvaaja kulkee origon kautta.





Vastaus: a) $f(x)$ b) $g(x)$ c) $h(x)$

178

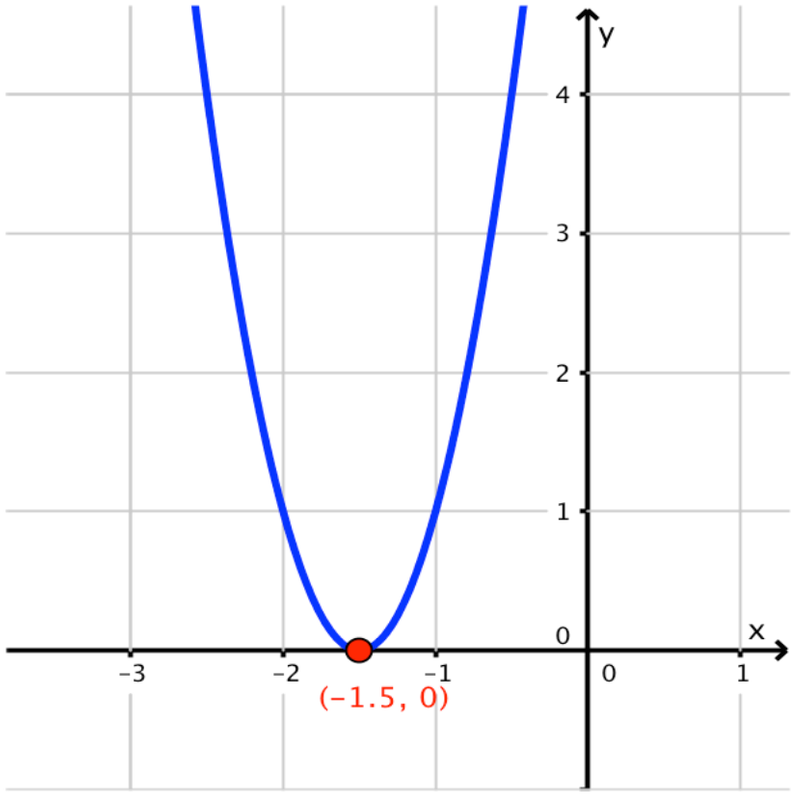


a) Huippu on pisteessä $(-1, 6)$

b) Funktion kuvaaja leikkaa x-akselin likimain pisteissä $(-3{,}4;\ 0)$ ja $(1{,}4;\ 0)$. Siten yhtälöllä $-x^2 - 2x + 5 = 0$ on kaksi juurta, jotka ovat $x \approx -3{,}4$ ja $x \approx 1{,}4$.

Vastaus: a) $(-1, 6)$ b) kaksi juurta, $x \approx -3{,}4$ ja $x \approx 1{,}4$

179



a) Funktion arvo on positiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselin yläpuolella.

Funktion f arvo on positiivinen, kun $x \neq -1{,}5$.

b) Funktion arvo on epänegatiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselilla tai sen yläpuolella.

Funktion f arvo on epänegatiivinen kaikilla muuttujan x arvoilla.

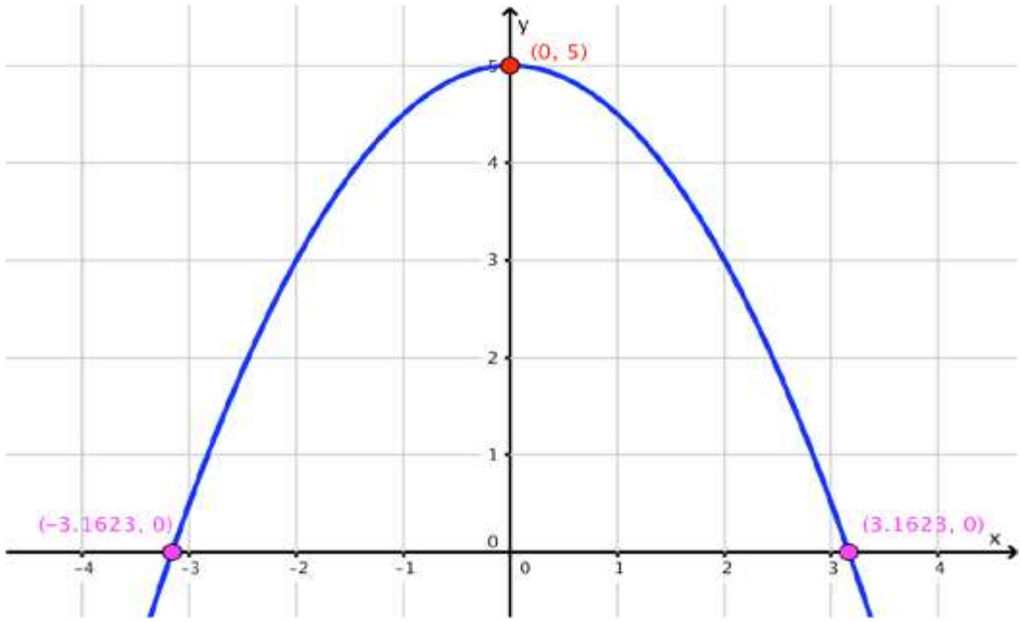
c) Funktion arvo on epäpositiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselilla tai sen alapuolella.

Funktion f arvo on epäpositiivinen, kun $x = -1{,}5$.

Vastaus: a) $x \neq -1,\ 5$ b) kaikilla muuttujan arvoilla c) $x = -1{,}5$

180

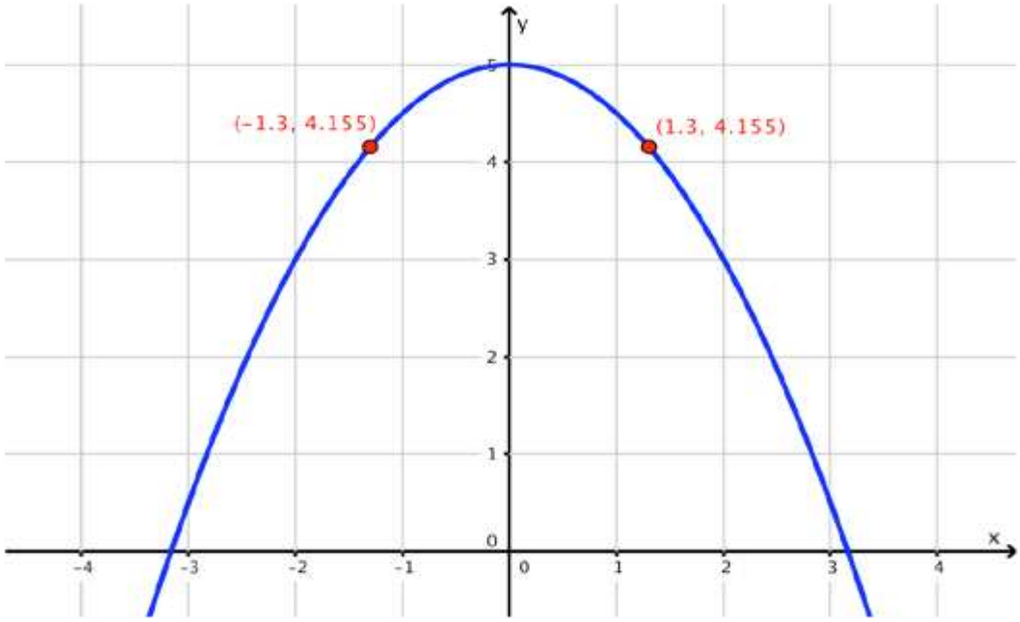
a)



Tunnelin korkeus nähdään huipun koordinaateista eli korkeus on 5,0 m.

Tunnelin leveys on nollakohtien välinen etäisyys eli
$2 \cdot 3{,}1623 = 6{,}3246 \approx 6{,}3$ (m) .

b) Oletetaan, että kuorma-auto voi ajaa sillan ali tien keskilinjaa pitkin. Koska auton leveys on 2,60 m se ulottuu 1,30 m keskilinjan kummallekin puolelle. Selvitetään kuvaajan avulla kuinka korkea tunneli on 1,30 m keskilinjan oikealla (vasemmalla) puolella.



Koska 1,30 m keskilinjasta sivussa tunnelin korkeus on likimain 4,155 m mahtuu 4,00 m korkea kuorma-auto ajamaan tunnelin läpi.

Vastaus: a) korkeus 5,0 m, leveys 6,3 m
b) mahtuu

181

a) $x^2 = 25$

$x = \sqrt{25}$ tai $x = -\sqrt{25}$

$x = 5$ $x = -5$

b) $(x-3)^2 = 25$

$x - 3 = \sqrt{25}$ tai $x - 3 = -\sqrt{25}$

$x - 3 = 5$ $x - 3 = -5$

$x = 5 + 8 = 8$ $x = -5 + 3 = -2$

c) $(x+4)^2 = 25$

$x + 4 = \sqrt{25}$ tai $x + 4 = -\sqrt{25}$

$x + 4 = 5$ $x + 4 = -5$

$x = 5 - 4 = 1$ $x = -5 - 4 = -9$

Vastaus: a) $x = -5$ tai $x = 5$
b) $x = -2$ tai $x = 8$
c) $x = -9$ tai $x = 1$

182

a) $(3x-1)^2 = 0$

$3x-1=0$

$3x=1$

$x=\frac{1}{3}$

b) $(3x-1)^2 = 4$

$3x-1=\sqrt{4}$ tai $3x-1=-\sqrt{4}$

$3x-1=2$ $3x-1=-2$

$3x=3$ $3x=-1$

$x=1$ $x=-\frac{1}{3}$

c) $(3x-1)^2 = -4$

Koska minkään luvun neliö ei ole negatiivinen, yhtälöä ei toteuta mikään luku.

Vastaus: a) $x=\frac{1}{3}$ b) $x=-\frac{1}{3}$ tai $x=1$ c) ei juuria

183

Sievennetään yhtälöä.

$$8x^2 + c = 15$$

$$8x^2 = 15 - c$$

$$x^2 = \frac{15 - c}{8}$$

Yhtälön oikean puolen merkin määrää osoittaja $15 - c$.

a) Yhtälöllä $x^2 = \frac{15 - c}{8}$ on kaksi juurta, kun yhtälön oikea puoli on positiivinen eli

$$15 - c > 0$$

$$15 > c$$

$$c < 15.$$

Voidaan valita esimerkiksi $c = 10$.

b) Yhtälöllä $x^2 = \frac{15 - c}{8}$ on yksi juuri, kun yhtälön oikealla puolella on luku 0.

$$\frac{15 - c}{8} = 0$$

$$15 - c = 0$$

$$c = 15$$

c) Yhtälöllä $x^2 = \frac{15 - c}{8}$ ei ole yhtään juurta, kun yhtälön oikea puoli on negatiivinen eli

$$15 - c < 0$$

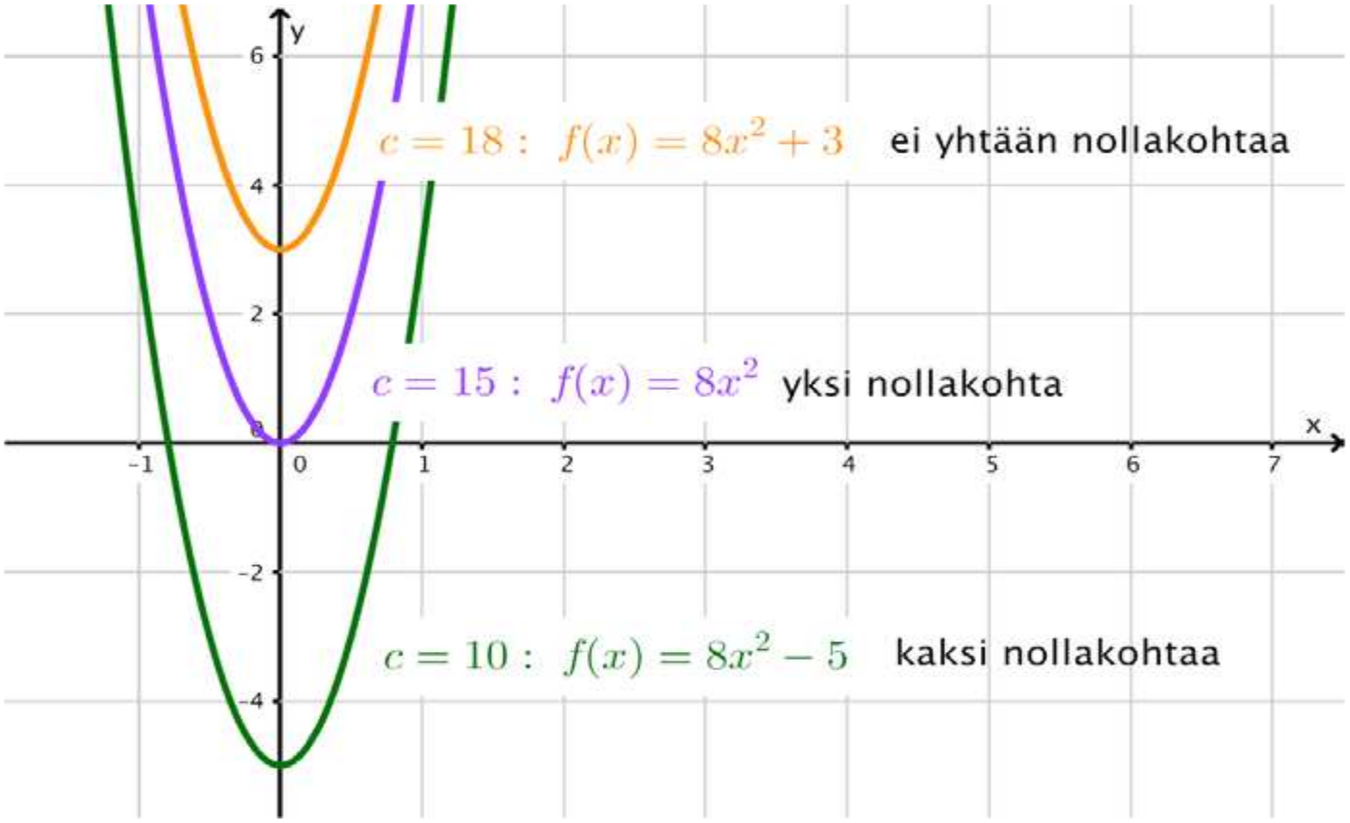
$$15 < c$$

$$c > 15.$$

Voidaan valita esimerkiksi $c = 18$.

Vastaus: a) $c < 15$, esimerkiksi $c = 10$
b) $c = 15$
c) $c > 15$, esimerkiksi $c = 18$

Yhtälön $8x^2 + c = 15$ eli $8x^2 + c - 15 = 0$ ratkaisut ovat funktion $f(x) = 8x^2 + c - 15$ nollakohtia. Tehtävä voidaan siis tarkistaa piirtämällä valittuja c:n arvoja vastaavien funktioiden kuvaajat.



184

Funktioiden f ja g arvot ovat yhtä suuret vain yhdessä kohdassa, kun yhtälöllä $f(x) = g(x)$ on vain yksi ratkaisu. Muodostetaan ja sievennetään yhtälö.

$$f(x) = g(x)$$

$$(x-3)^2 = -6x + k$$

$$x^2 - 6x + 9 = -6x + k$$

$$x^2 + 9 = k$$

$$x^2 = k - 9$$

Yhtälöllä $x^2 = k - 9$ on vain yksi ratkaisu, kun

$$k - 9 = 0$$

$$k = 9.$$

Kun $k = 9$ on yhtälön ratkaisu

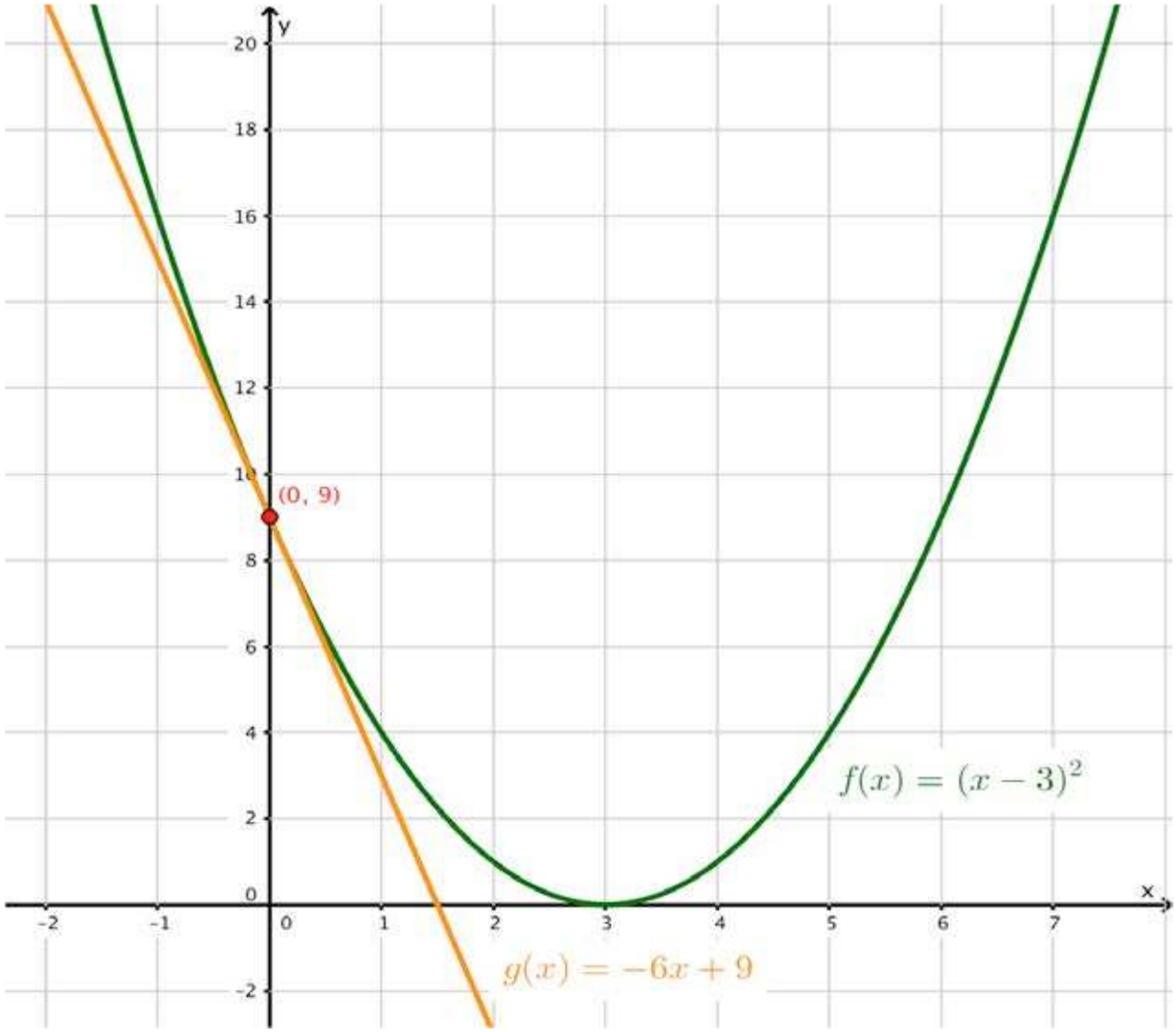
$$x^2 = 9 - 9$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0.$$

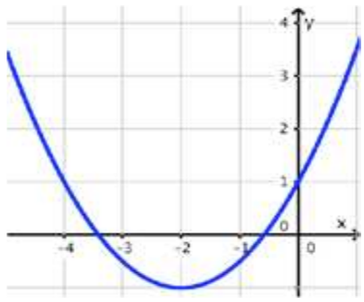
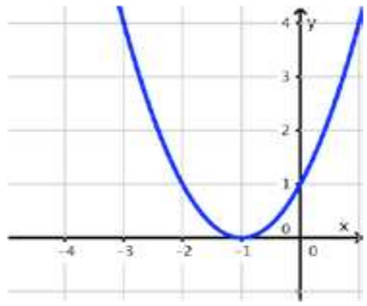
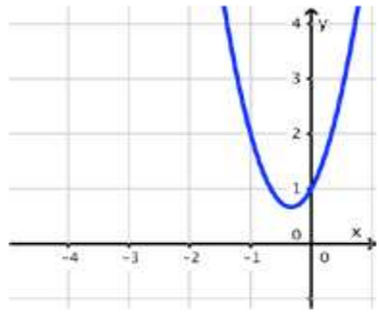
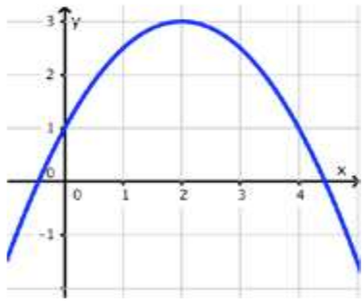
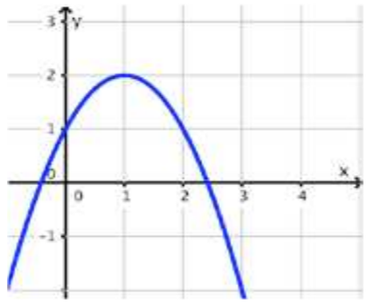
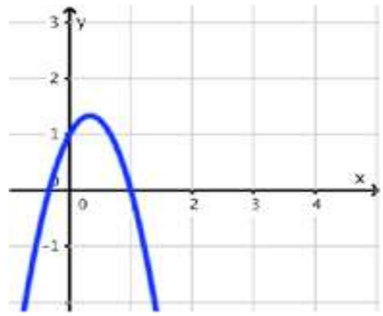
Vastaus: $k = 9$, kohta on $x = 0$

Tehtävän voi tarkistaa piirtämällä funktioiden kuvaajat. Koska kuvaajilla on vain yksi leikkauspiste on k:n arvo oikea.



185

a) Piirretään paraabelin $y = ax^2 + 2x + 1$ kuvaajia parametrin a eri arvoilla. (Geometriaohjelmassa voit käyttää myös liukusäädintä parametrille a.)

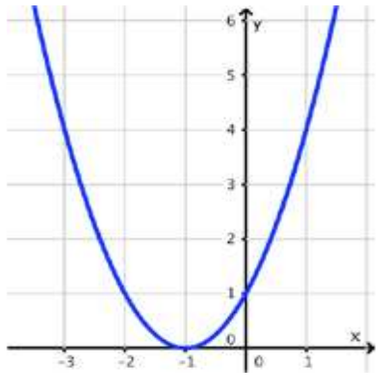
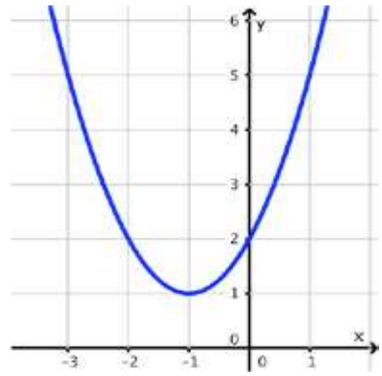
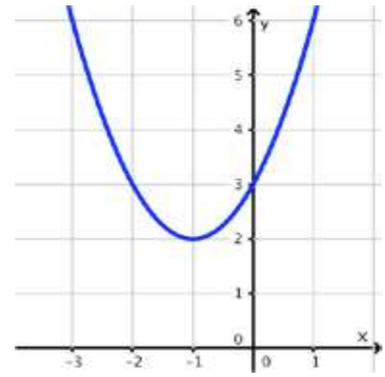
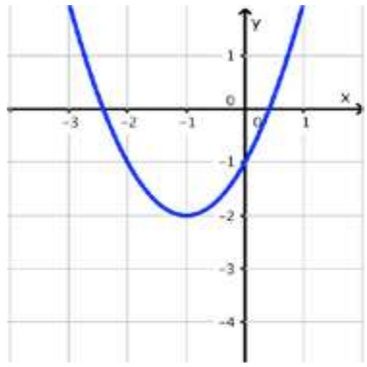
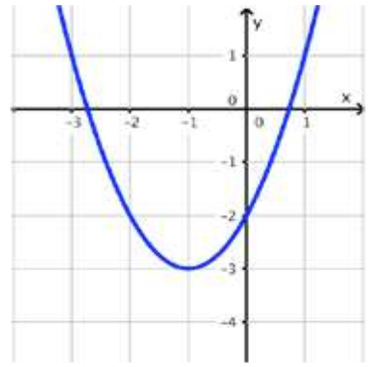
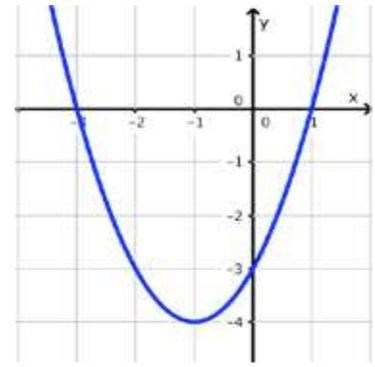
$a = 0{,}5$ 	$a = 1$ 	$a = 3$ 
$a = -0{,}5$ 	$a = -1$ 	$a = -3$ 

Paraabeli on sitä kapeampi, mitä suurempi on parametrin a itseisarvo.

Kun $a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin.

Kun $a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin.

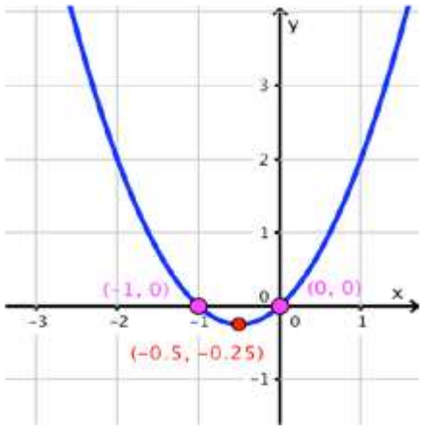
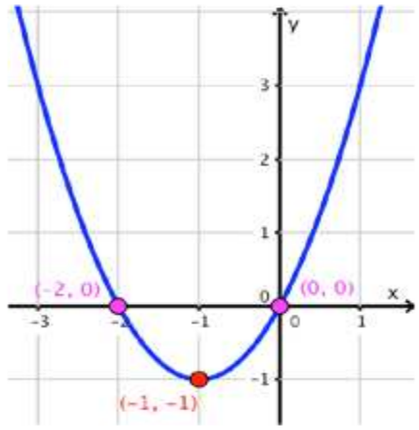
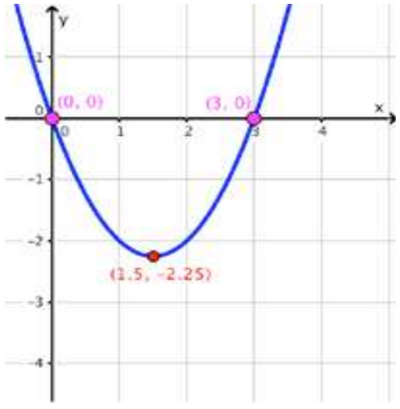
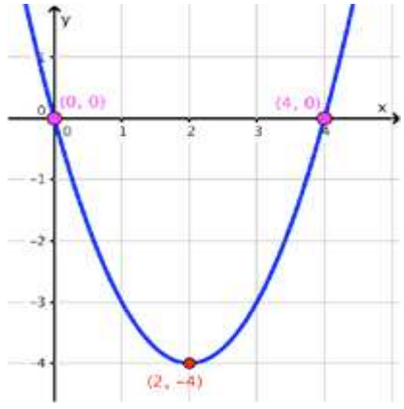
b) Piirretään paraabelin $y = x^2 + 2x + c$ kuvaajia parametrin c eri arvoilla. (Geometriaohjelmassa voit käyttää myös liukusäädintä parametrille c.)

$c = 1$ 	$c = 2$ 	$c = 3$ 
$c = -1$ 	$c = -2$ 	$c = -3$ 

Paraabeli leikkaa y-akselin pisteessä $(0, c)$.

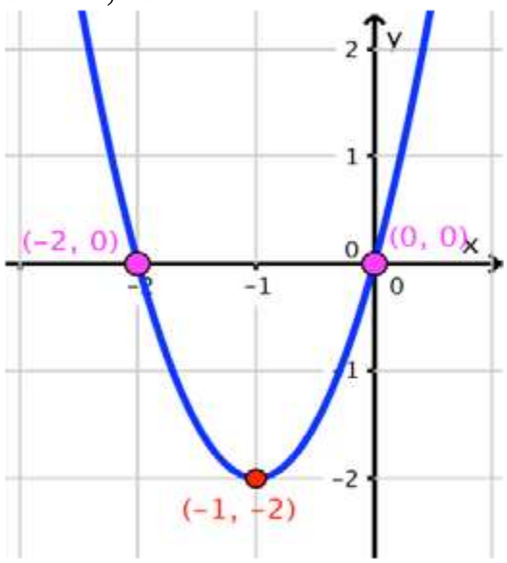
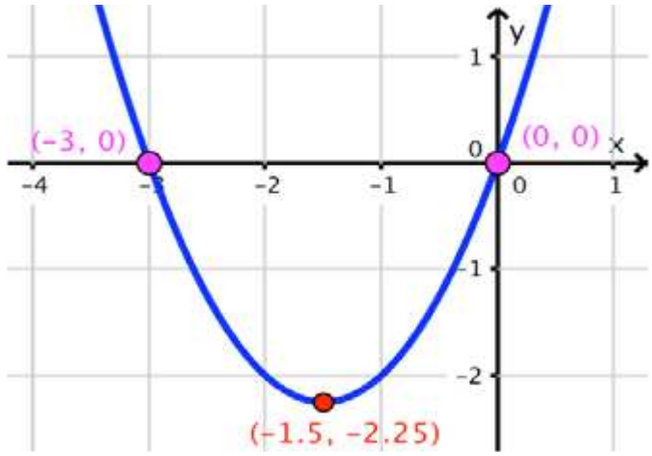
Kun parametrin c arvo kasvaa, niin paraabeli nousee ylöspäin.

c) Piirretään paraabelin $y = x^2 + bx$ kuvaajia parametrin b eri arvoilla. (Geometriaohjelmassa voit käyttää myös liukusäädintä parametrille b.)

$b = 1$  Nollakohdat: -1 ja 0 Huipun x-koordinaatti: $-\frac{1}{2}$	$b = 2$  Nollakohdat: -2 ja 0 Huipun x-koordinaatti: -1
$b = -3$  Nollakohdat: 0 ja 3 Huipun x-koordinaatti: $\frac{3}{2}$	$b = -4$  Nollakohdat: 0 ja 4 Huipun x-koordinaatti: 2

Nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = -b$. Huippu on kohdassa $x = -\frac{b}{2}$.

d) Piirretään paraabelin $y = ax^2 + bx$ kuvaajia parametrien a ja b eri arvoilla. (Geometriaohjelmassa voit käyttää myös liukusäätimiä parametreille a ja b.)

$a = 2,\ b = 4$  Nollakohdat: -2 ja 0 Huipun x-koordinaatti: -1	$a = 1,\ b = 3$  Nollakohdat: -3 ja 0 Huipun x-koordinaatti: $-\frac{3}{2}$

Nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = -\frac{b}{a}$.

Huippu on kohdassa $x = -\frac{b}{2a}$.

186

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a = 1, \quad b = -4, \quad c = 3$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

b) $5x^2 + x - 4 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a = 5, \quad b = 1, \quad c = -4$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 5}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{10} = \frac{-1 \pm 9}{10}$$

$$x = \frac{-1+9}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-9}{10} = \frac{-10}{10} = -1$$

Vastaus: a) $x = 1$ tai $x = 3$ b) $x = -1$ tai $x = \frac{4}{5}$

187

a) $x^2 + 3 = 5x$

$x^2 - 5x + 3 = 0$ $\quad a = 1,\ \ b = -5,\ \ c = 3$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

b) $3x^2 + 2x = -1$

$3x^2 + 2x + 1 = 0$ $\quad a = 3,\ \ b = 2,\ \ c = 1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-10}}{6}$$

Koska lukua $\sqrt{-10}$ ei ole määritelty, yhtälöllä ei ole juuria.

Vastaus: a) $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ tai $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ b) ei juuria

188

a) $x^2 + 9x = 0$ $\qquad a = 1,\ \ b = 9,\ \ c = 0$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm 9}{2}$$

$$x = \frac{-9 + 9}{2} = \frac{0}{2} = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-9 - 9}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

b) $4y^2 - 5y + 1 = 1$

$4y^2 - 5y = 0$ $\qquad a = 4,\ \ b = -5,\ \ c = 0$

$$y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm 5}{8}$$

$$y = \frac{5 + 5}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \quad \text{tai} \quad y = \frac{5 - 5}{8} = \frac{0}{8} = 0$$

Vastaus: a) $x = -9$ tai $x = 0$ $\qquad$ b) $y = 0$ tai $y = \frac{5}{4}$

189

a) $(x+3)^2 = 12x$

$x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = 12x$

$x^2 + 6x - 12x + 9 = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \qquad a = 1, \;\; b = -6, \;\; c = 9$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

b) $(x+2)(x-2) = 3x$

$x^2 - 2^2 = 3x$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad a = 1, \;\; b = -3, \;\; c = -4$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Vastaus: a) $x = 3$ b) $x = -1$ tai $x = 4$

190

a) Funktion $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$ nollakohdat ovat yhtälön $-3x^2 - 2x + 1 = 0$ juuret.

$$-3x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad \big| \cdot (-1)$$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \qquad a = 3,\ \ b = 2,\ \ c = -1$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

$$x = \frac{-2 + 4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 - 4}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

b) Funktion $g(x) = 7x^2 - 56$ nollakohdat ovat yhtälön $7x^2 - 56 = 0$ juuret.

$$7x^2 - 56 = 0$$

$$7x^2 = 56 \qquad \big| : 7$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \sqrt{8} \qquad \text{tai} \qquad x = -\sqrt{8}$$

$$x = \sqrt{4 \cdot 2} \qquad\qquad x = -\sqrt{4 \cdot 2}$$

$$x = 2\sqrt{2} \qquad\qquad x = -2\sqrt{2}$$

Vastaus: a) $x = -1$ tai $x = \frac{1}{3}$ b) $x = -2\sqrt{2}$ tai $x = 2\sqrt{2}$

191

a) $(x+1)^2 = 5$

$x^2 + 2x + 1 = 5$

$x^2 + 2x - 4 = 0$ $\qquad a = 1,\ \ b = 2,\ \ c = -4$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 5}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}\,(-1 \pm \sqrt{5})}{\cancel{2}} = -1 \pm \sqrt{5}$$

$x = -1 + \sqrt{5}$ tai $x = -1 - \sqrt{5}$

Yhtälön voi ratkaista myös ilman ratkaisukaavaa.

$(x+1)^2 = 5$

$x + 1 = \sqrt{5}$ tai $x + 1 = -\sqrt{5}$

$x = -1 + \sqrt{5}$ $\qquad$ $x = -1 + \sqrt{5}$

b) $x^2 + 1 = 4x$

$x^2 - 4x + 1 = 0$ $\qquad a = 1,\ \ b = -4,\ \ c = 1$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 3}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}\,(2 \pm \sqrt{3})}{\cancel{2}} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$x = 2 + \sqrt{3}$ tai $x = 2 - \sqrt{3}$

Vastaus: a) $x = -1 - \sqrt{5}$ tai $x = -1 + \sqrt{5}$

b) $x = 2 - \sqrt{3}$ tai $x = 2 + \sqrt{3}$

192

Merkitään siskojen ikää kirjaimella x.

Muodostetaan yhtälö annetuista tiedoista.

Ikä kerrotaan luvulla 14 ja tulosta vähennetään 33: $14x - 33$

Iän neliö: x^2

$$14x - 33 = x^2$$

$$-x^2 + 14x - 33 = 0$$ Ratkaistaan laskimella

$x = 3$ tai $x = 11$

Siskojen iät ovat siis 3 vuotta ja 11 vuotta.

Vastaus: 3 ja 11 vuotta

193

$f(t) = at^2 + a^2t + 18$

Muodostetaan annetun tiedon perusteella yhtälö ja ratkaistaan vakion a arvo laskimella.

$$f(-3) = 6$$

$$a \cdot (-3)^2 + a^2 \cdot (-3) + 18 = 6$$

$$-3a^2 + 9a + 18 = 6$$

$$-3a^2 + 9a + 12 = 0$$

$$a = -1 \quad \text{tai} \quad a = 4$$

Vastaus: $a = -1$ tai $a = 4$

194

Sijoitetaan $x = 2$ yhtälöön ja ratkaistaan vakion a arvo.

$$(2 - a)(2 + 1) = 15$$

$$a = -3$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$(x - (-3))(x + 1) = 15$$

$$(x + 3)(x + 1) = 15 \qquad \text{Sievennetään laskimella.}$$

$$x^2 + 4x + 3 = 15$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.}$$

$$x = -6 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Toinen juuri on siis -6.

Vastaus: $a = -3$, toinen juuri $x = -6$

195

a) $x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a = 1, \quad b = 1, \quad c = -6$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

b) $6x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a = 6, \quad b = -1, \quad c = -1$$

$$= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12}$$

$$x = \frac{1+5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-5}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Vastaus: a) $x = -3$ tai $x = 2$ b) $x = -\frac{1}{3}$ tai $x = \frac{1}{2}$

196

a) $5x^2 = -x$

$5x^2 + x = 0 \qquad a = 5,\ \ b = 1,\ \ c = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0}}{2 \cdot 5} = \frac{-1 \pm 1}{10}$$

$$x = \frac{-1+1}{10} = 0 \ \text{ tai } \ x = \frac{-1-1}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

b) $x^2 + x = 2 - 2x^2$

$x^2 + 2x^2 + x - 2 = 0$

$3x^2 + x - 2 = 0 \qquad a = 3,\ \ b = 1,\ \ c = -2$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6}$$

$$x = \frac{-1+5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \ \text{ tai } \ x = \frac{-1-5}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

Vastaus: a) $x = -\frac{1}{5}$ tai $x = 0$ b) $x = -1$ tai $x = \frac{2}{3}$

197

a) $(x-3)^2 = 3$

$x^2 - 6x + 9 = 3$

$x^2 - 6x + 6 = 0$ $\qquad a = 1, \quad b = -6, \quad c = 6$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}\,(3 \pm \sqrt{3})}{\cancel{2}} = 3 \pm \sqrt{3}$$

$x = 3 + \sqrt{3}$ tai $x = 3 - \sqrt{3}$

Yhtälön voi ratkaista myös ilman ratkaisukaavaa.

$(x-3)^2 = 3$

$x - 3 = \sqrt{3}$ $\qquad$ tai $\qquad$ $x - 3 = -\sqrt{3}$

$x = 3 + \sqrt{3}$ $\qquad\qquad$ $x = 3 - \sqrt{3}$

b) $x^2 = 1 - 2x$

$x^2 + 2x - 1 = 0 \qquad a = 1,\ \ b = 2,\ \ c = -1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}\,(-1 \pm \sqrt{2})}{\cancel{2}} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$x = -1 + \sqrt{2}$ tai $x = -1 - \sqrt{2}$

Vastaus: a) $x = 3 - \sqrt{3}$ tai $x = 3 + \sqrt{3}$

b) $x = -1 - \sqrt{2}$ tai $x = -1 + \sqrt{2}$

198

a) $h(t) = 0$

$-t^2 + 10t = 0 \qquad | \cdot (-1)$

$t^2 - 10t = 0 \qquad a = -1,\ \ b = -10,\ \ c = 0$

$$t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 10}{2}$$

$$t = \frac{10+10}{2} = \frac{20}{2} = 10 \quad \text{tai} \quad t = \frac{10-10}{2} = 0$$

b) $h(t) = 30$

$-t^2 + 10t = 30$

$-t^2 + 10t - 30 = 0 \qquad | \cdot (-1)$

$t^2 - 10t + 30 = 0 \qquad a = -1,\ \ b = -10,\ \ c = 30$

$$t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

Koska lukua $\sqrt{-20}$ ei ole määritelty, yhtälöllä ei ole juuria.
Täten funktion h arvo ei ole 30 millään muuttujan t arvolla.

c) $h(t) = 25$

$$-t^2 + 10t = 25$$

$$-t^2 + 10t - 25 = 0 \qquad \big| \cdot (-1)$$

$$t^2 - 10t + 25 = 0 \qquad a = -1,\ \ b = -10,\ \ c = 25$$

$$t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 0}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Vastaus: a) $t = 0$ tai $t = 10$
b) Ei millään muuttujan t arvolla.
c) $t = 5$

199

a) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0 \qquad | \cdot 9$

$9x^2 - 6x + 1 = 0 \qquad a = 9, \;\; b = -6, \;\; c = 1$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9} = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

b) $\frac{x^2}{2} - \frac{x-3}{12} = \frac{1}{3} \qquad | \cdot 12$

$6x^2 - (x - 3) = 4$

$6x^2 - x + 3 - 4 = 0$

$6x^2 - x - 1 = 0 \qquad a = 6, \;\; b = -1, \;\; c = -1$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12}$$

$x = \frac{1+5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ tai $x = \frac{1-5}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$

Vastaus: a) $x = \frac{1}{3}$ b) $x = -\frac{1}{3}$ tai $x = \frac{1}{2}$

200

$$f(x) = g(x)$$

$$(x-4)^2 = (3-x)(3+x)$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot (-4) + (-4)^2 = 3^2 - x^2$$

$$x^2 - 8x + 16 = 9 - x^2$$

$$x^2 + x^2 - 8x + 16 - 9 = 0$$

$$2x^2 - 8x + 7 = 0 \qquad a = 2, \quad b = -8, \quad c = 7$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{8}}{4}$$

$$= \frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{18}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(4 \pm \sqrt{2})}{\underset{9}{\cancel{18}}} = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{9}$$

$$x = \frac{4-\sqrt{2}}{9} \quad \text{tai} \quad x = \frac{4-\sqrt{2}}{9}$$

Vastaus: $x = \frac{4-\sqrt{2}}{9}$ tai $x = \frac{4-\sqrt{2}}{9}$

201

Merkitään veljien ikää kirjaimella x.

Muodostetaan yhtälö annetuista tiedoista.

Iän neliöön lisätään luku 14: $x^2 + 14$

Ikä yhdeksänkertaisena: $9x$

$$x^2 + 14 = 9x$$

$x^2 - 9x + 14 = 0$ Ratkaistaan laskimella

$x = 2$ tai $x = 7$

Veljien iät ovat siis 2 vuotta ja 7 vuotta.

Vastaus: 2 ja 7 vuotta

202

Olkoon x parillinen luku. Tällöin luvut $x-1$ ja $x+1$ ovat kaksi peräkkäistä paritonta lukua.

Muodostetaan näiden peräkkäisten parillisten lukujen tulo.

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$$

Vuosiluvut, jotka ovat kahden peräkkäisen parittoman luvun tuloja, ovat siis funktion $f(x) = x^2 - 1$ arvoja, missä x on jokin parillinen luku.

Taulukoidaan muuttujan x eri arvoja vastaavia syntymävuosia.

$x = 40$	$f(x) = 40^2 - 1 = 1599$, ei voi olla isoisän syntymävuosi
$x = 42$	$f(x) = 42^2 - 1 = 1763$, ei voi olla isoisän syntymävuosi
$x = 44$	$f(x) = 44^2 - 1 = 1935$, voi olla isoisän syntymävuosi
$x = 46$	$f(x) = 46^2 - 1 = 2115$, ei voi olla isoisän syntymävuosi

Siis isoisän syntymävuosi on 1935.

Vastaus: 1935

203

Merkitään ensimmäistä lukua kirjaimella x. Tätä seuraavat luonnolliset luvut ovat $x + 1$ ja $x + 2$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad \big| \text{ sijoitetaan } y = x + 1 \text{ ja } z = x + 2$$

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

Koska -1 ei ole luonnollinen luku, se ei käy ratkaisuksi. Ensimmäinen luku on siis 3 ja kaksi seuraavaa lukua 4 ja 5

Vastaus: 3, 4 ja 5

204

Funktion f nollakohta on -1 eli $f(-1) = 0$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$f(-1) = 0$$

$$5(-1+a)(-1-3) = 0$$

$$a = 1$$

Funktioksi saadaan $f(t) = 5(t+1)(t-3)$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan millä muuttujan t arvolla funktion arvo on 30.

$5(t+1)(t-3) = 30$ Sievennetään laskimella.

$5t^2 - 10t - 15 = 30$

$5t^2 - 10t - 45 = 0$ Ratkaistaan laskimella.

$t = 1 - \sqrt{10}$ tai $t = 1 + \sqrt{10}$

Vastaus: $a = 1$, $f(t) = 30$, kun $t = 1 - \sqrt{10}$ tai $t = 1 + \sqrt{10}$

205

Funktion g nollakohta on -3 eli $g(-3) = 0$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$g(-3) = 0$$

$$2 \cdot (-3)^2 - a \cdot (-3) - a^2 = 0$$

$$-a^2 + 3a + 18 = 0$$

$$a = -3 \quad \text{tai} \quad a = 6$$

1) Kun $a = -3$, funktio on
$g(x) = 2x^2 - (-3)x - (-3)^2 = 2x^2 + 3x - 9$.

Ratkaistaan nollakohdat.

$$2x^2 + 3x - 9 = 0$$

$$x = -3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3}{2}$$

Toinen nollakohta on siis $\frac{3}{2}$.

2) Kun $a = 6$, funktio on $g(x) = 2x^2 - 6x - 6^2 = 2x^2 - 6x - 36$.
Ratkaistaan nollakohdat.

$2x^2 - 6x - 36 = 0$

$x = -3$ tai $x = 6$

Toinen nollakohta on siis 6.

Vastaus: Kun $a = -3$, funktion toinen nollakohta on $\frac{3}{2}$.
Kun $a = 6$, funktion toinen nollakohta 6.

206

Sijoitetaan $x = -1$ yhtälöön.

$$(-1)^2 - (a^2 - 1) \cdot (-1) - a^2 = 0$$

$$1 + a^2 - 1 - a^2 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{identtisesti tosi}$$

Yhtälö on siis tosi kaikilla vakion a arvoilla, kun $x = -1$.

Luvun $x = 2$ tulee olla yhtälön toinen juuri. Sijoitetaan $x = 2$ yhtälöön ja ratkaistaan vakion a arvo.

$$2^2 - (a^2 - 1) \cdot 2 - a^2 = 0$$

$$4 - 2a^2 + 2 - a^2 = 0$$

$$-3a^2 + 6 = 0$$

$$3a^2 = 6$$

$$a^2 = 2$$

$$a = \sqrt{2} \quad \text{tai} \quad a = -\sqrt{2}$$

Vastaus: Yhtälön toinen juuri on $x = 2$, kun $a = -\sqrt{2}$ tai $a = \sqrt{2}$.

207

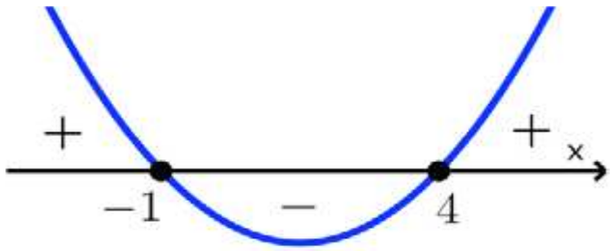
Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$ nollakohdat.

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad a = 1,\ b = -3,\ c = -4$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Hahmotellaan funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$ kuvaaja, joka on ylöspäin aukeava paraabeli.



Funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$ arvot ovat positiivisia, kun $x < -1$ tai $x > 4$.

Vastaus: $x < -1$ tai $x > 4$

208

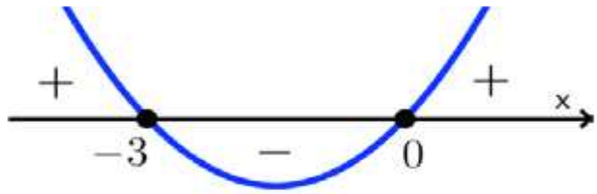
Ratkaistaan funktion $f(x) = 2x^2 + 6x$ nollakohdat.

$$2x^2 + 6x = 0 \qquad a = 2,\ \ b = 6,\ \ c = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm 6}{4}$$

$$x = \frac{-6 - 6}{4} = \frac{-12}{4} = -3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6 + 6}{4} = 0$$

Hahmotellaan funktion $f(x) = 2x^2 + 6x$ kuvaaja, joka on ylöspäin aukeava paraabeli.



Funktion $f(x) = 2x^2 + 6x$ arvot ovat negatiivisia, kun $-3 < x < 0$.

Vastaus: $-3 < x < 0$

209

a) $2x^2 + x - 3 \geq 0$

Ratkaistaan funktion $f(x) = 2x^2 + x - 3$ nollakohdat.

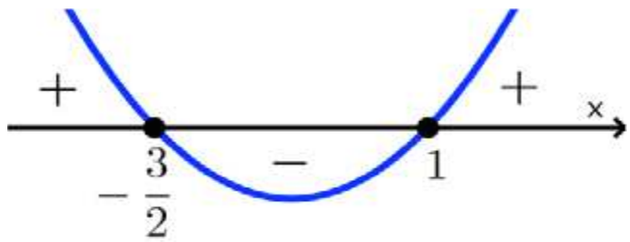
$2x^2 + x - 3 = 0$ $\qquad a = 2,\ \ b = 1,\ \ c = -3$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

$$x = \frac{-1-5}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+5}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = 2x^2 + x - 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $2x^2 + x - 3 \geq 0$ toteutuu, kun $x \leq -\frac{3}{2}$ tai $x \geq 1$.

b) $-x^2+9x-8<0$

Ratkaistaan funktion $f(x)=-x^2+9x-8$ nollakohdat.

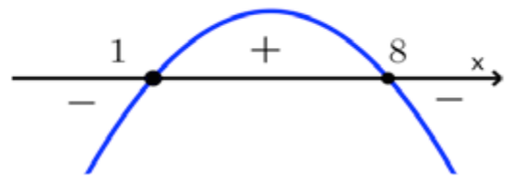
$-x^2+9x-8=0 \qquad a=-1,\ b=9,\ c=-8$

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot(-1)\cdot(-8)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-9\pm\sqrt{49}}{-2}=\frac{-9\pm7}{-2}$$

$$x=\frac{-9+7}{-2}=\frac{-2}{-2}=1 \quad \text{tai} \quad x=\frac{-9-7}{-2}=\frac{-16}{-2}=8$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x)=-x^2+9x-8$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $-x^2+9x-8<0$ toteutuu, kun $x<1$ tai $x>8$.

Vastaus: a) $x\le-\frac{3}{2}$ tai $x\ge1$ b) $x<1$ tai $x>8$

210

a) $x^2 \leq 9$

$x^2 - 9 \leq 0$

Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 9$ nollakohdat.

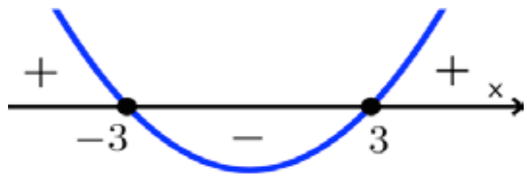
$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \sqrt{9} = 3$ tai $x = -\sqrt{9} = -3$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 - 9$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $x^2 - 9 \leq 0$ toteutuu, kun $-3 \leq x \leq 3$.

b) $12 > 3x^2$

$-3x^2 + 12 > 0$

Ratkaistaan funktion $f(x) = -3x^2 + 12$ nollakohdat.

$-3x^2 + 12 = 0$

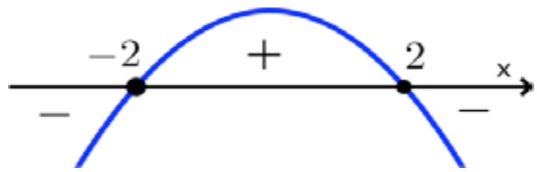
$-3x^2 = -12$

$x^2 = 4$

$x = \sqrt{4} = 2$ tai $x = -\sqrt{4} = -2$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = -3x^2 + 12$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $-3x^2 + 12 > 0$ toteutuu, kun $-2 < x < 2$.

Vastaus: a) $-3 \le x \le 3$ b) $-2 < x < 2$

211

a) $x^2 + 4 > 4x$

$x^2 - 4x + 4 > 0$

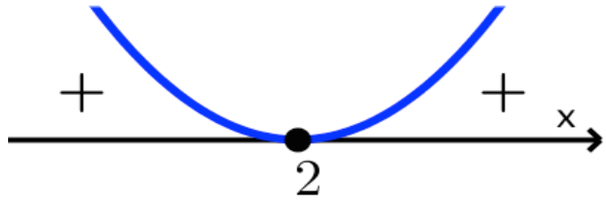
Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 4x + 4$ nollakohdat.

$x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad a = 1, \;\; b = -4, \;\; c = 4$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka ainoa nollakohta on $x = 2$.



Funktio f ei siis saa millään muuttujan x arvoilla negatiivisia arvoja. Arvon nolla funktio f saa, kun $x = 2$.

Epäyhtälö $x^2 - x + 4 > 0$ toteutuu, kun $x \neq 2$.

b) $x(x+2) \le -1$

$x^2 + 2x + 1 \le 0$

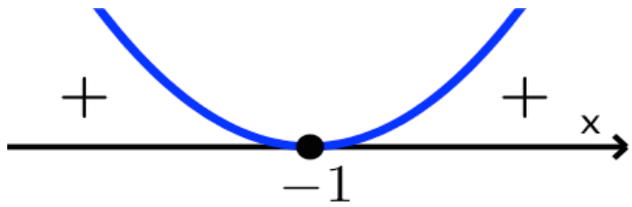
Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 + 2x + 1$ nollakohdat.

$x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad a = 1, \;\; b = 2, \;\; c = 1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 0}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka ainoa nollakohta on $x = -1$.



Funktio f ei siis saa millään muuttujan x arvoilla negatiivisia arvoja. Arvon nolla funktio f saa, kun $x = -1$.

Epäyhtälö $x^2 + 2x + 1 \le 0$ toteutuu, kun $x = -1$.

Vastaus: a) $x \neq 2$ b) $x = -1$

212

a) $(x-2)^2 < 9$

$x^2 - 4x + 4 < 9 \quad \big| -9$

$x^2 - 4x - 5 < 0$

Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 4x - 5$ nollakohdat.

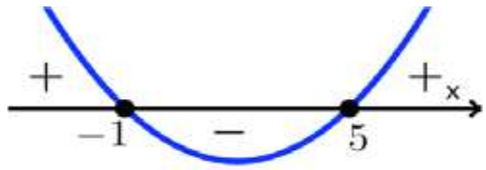
$x^2 - 4x - 5 = 0 \qquad a = 1, \;\; b = -4, \;\; c = -5$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 - 4x - 5$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $x^2 - 4x - 5 < 0$ toteutuu, kun $-1 < x < 5$.

b) $(2x+1)^2 \geq x^2$

$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 \geq x^2$

$4x^2 + 4x + 1 \geq x^2 \qquad \big| -x^2$

$3x^2 + 4x + 1 \geq 0$

Ratkaistaan funktion $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ nollakohdat.

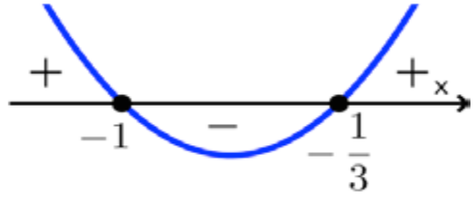
$3x^2 + 4x + 1 = 0 \qquad a = 3, \;\; b = 4, \;\; c = 1$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6}$$

$$x = \frac{-4-2}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4+2}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $3x^2 + 4x + 1 \geq 0$ toteutuu, kun $x \leq -1$ tai $x \geq -\frac{1}{3}$.

Vastaus: a) $-1 < x < 5$ b) $x \leq -1$ tai $x \geq -\frac{1}{3}$

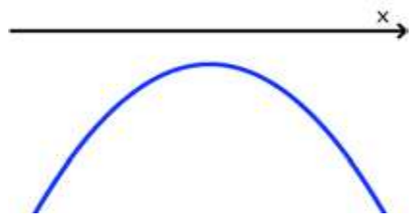
213

Sievennetään funktion lauseke.

$$\begin{aligned} f(x) &= 7x - (x+2)^2 \\ &= 7x - (x^2 + 4x + 4) \\ &= 7x - x^2 - 4x - 4 \\ &= -x^2 + 3x - 4 \end{aligned}$$

Funktion f kuvaaja on siis alaspäin aukeava paraabeli.

Funktio saa vain negatiivisia arvoja, mikäli sen kuvaaja on kokonaan x-akselin alapuolella. Funktion f kuvaaja on kokonaan x-akselin alapuolella, mikäli funktiolla f ei ole yhtään nollakohtaa.



Ratkaistaan funktion $f(x) = -x^2 + 3x - 4$ nollakohdat.

$$-x^2 + 3x - 4 = 0 \qquad \big| \cdot (-1)$$

$$x^2 - 3x + 4 = 0 \qquad\qquad a = 1,\ \ b = -4,\ \ c = -5$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Koska lukua $\sqrt{-7}$ ei ole määritelty, ei yhtälöllä ole juuria. Siis funktiolla f ei ole yhtään nollakohtaa. Täten funktion f kuvaaja on kokonaan x-akselin alapuolella ja funktio f saa vain negatiivisia arvoja. □

214

Merkitään lukua kirjaimella x. Luvun neliö on tällöin x^2.

Luvun x ja sen neliön summa $x + x^2$ tulee olla korkeintaan 30 eli $x + x^2 < 30$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$x + x^2 \leq 30$$

$$-6 \leq x \leq 5$$

Välillä $-6 \leq x \leq 5$ olevat positiiviset kokonaisluvut ovat 1, 2, 3, 4 ja 5.

Vastaus: 1, 2, 3, 4 ja 5

215

a) Koska neliöjuuri on määritelty vain epänegatiivisille luvuille, niin funktio $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$ on määritelty, kun $x^2 - 7x \geq 0$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$x^2 - 7x \geq 0$

$x \leq 0$ tai $x \geq 7$

b) Funktio $f(x) = \sqrt{10 - x(17 - 3x)} = \sqrt{10 - 17x + 3x^2}$ on määritelty, kun $10 - 17x + 3x^2 \geq 0$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$10 - 17x + 3x^2 \geq 0$

$x \leq \frac{2}{3}$ tai $x \geq 5$

Vastaus: a) $x \leq 0$ tai $x \geq 7$ b) $x \leq \frac{2}{3}$ tai $x \geq 5$

216

a) $2x^2 - 10x + 12 \geq 0$

Ratkaistaan funktion $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$ nollakohdat.

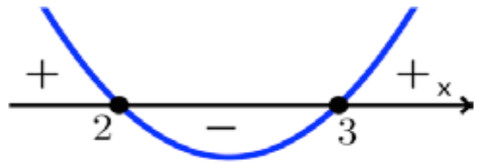
$2x^2 - 10x + 12 = 0$ $\qquad a = 2,\ \ b = -10,\ \ c = 12$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{10 \pm 2}{4}$$

$$x = \frac{10 - 2}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{10 + 2}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $2x^2 - 10x + 12 \geq 0$ toteutuu, kun $x \leq 2$ tai $x \geq 3$.

b) $x^2 < -x$

$x^2 + x < 0$

Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 + x$ nollakohdat.

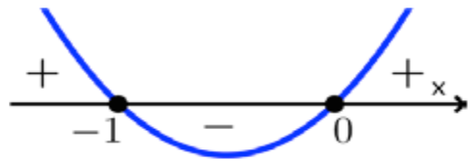
$x^2 + x = 0 \qquad a = 1,\ b = 1,\ c = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{-1-1}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+1}{2} = 0$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 + x$
kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $x^2 + x < 0$ toteutuu, kun $-1 < x < 0$.

Vastaus: a) $x \le 2$ tai $x \ge 3$ b) $-1 < x < 0$

217

a) $x^2 < \frac{1}{4}$

$x^2 - \frac{1}{4} < 0$

Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ nollakohdat.

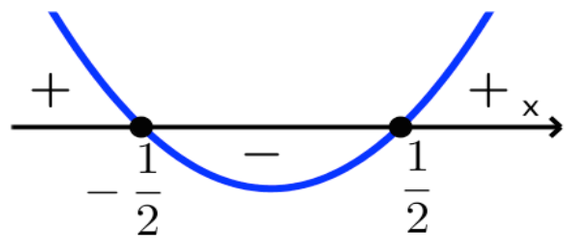
$x^2 - \frac{1}{4} = 0$

$x^2 = \frac{1}{4}$

$x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ tai $x = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $x^2 - \frac{1}{4} < 0$ toteutuu, kun $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

b) $x(6-x) \le 9$

$6x - x^2 \le 9$

$-x^2 + 6x - 9 \le 0$

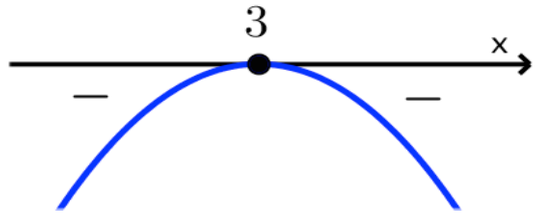
Ratkaistaan funktion $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ nollakohdat.

$-x^2 + 6x - 9 = 0$ $\qquad a = -1,\ \ b = 6,\ \ c = -9$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm 0}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka ainoa nollakohta on $x = 3$.



Epäyhtälö $-x^2 + 6x - 9 \le 0$ toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.

Vastaus: a) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ b) Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut.

218

a) $(x-5)^2 > 3-x^2$

$x^2-10x+25 > 3-x^2$

$2x^2-10x+22 > 0$

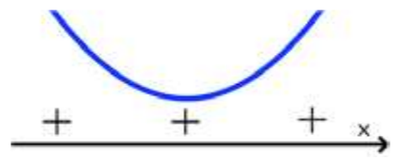
Ratkaistaan funktion $f(x)=2x^2-10x+22$ nollakohdat.

$2x^2-10x+22=0 \qquad a=2,\ b=-10,\ c=22$

$$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 2\cdot 22}}{2\cdot 2}=\frac{10\pm\sqrt{-76}}{4}$$

Lukua $\sqrt{-76}$ ei ole määritelty, joten funktiolla f ei ole nollakohtia.

Koska funktion $f(x)=2x^2-10x+22$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ja funktiolla ei ole nollakohtia, niin funktion f kaikki arvot ovat positiivisia.



Epäyhtälö $2x^2-10x+22>0$ toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.

b) $(x-1)^2 > 2x-3$

$x^2 - 2x + 1 > 2x - 3$

$x^2 - 4x + 4 > 0$

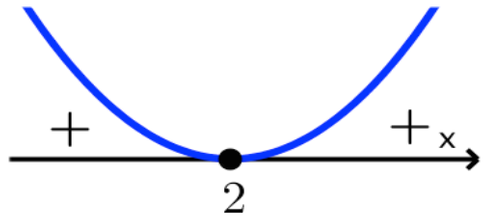
Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 4x + 4$ nollakohdat.

$x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad a = 1,\ b = -4,\ c = 4$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka ainoa nollakohta on $x = 2$.



Funktio f ei siis saa millään muuttujan x arvoilla negatiivisia arvoja. Arvon nolla funktio f saa, kun $x = 2$.

Epäyhtälö $x^2 - 4x + 4 \le 0$ toteutuu, kun $x = 2$.

Vastaus: a) Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut. b) $x = 2$

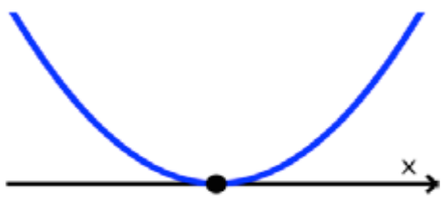
219

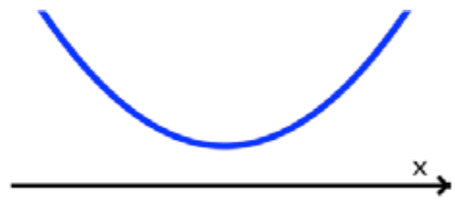
Sievennetään funktion lauseke.

$$f(x) = x(x-6)+9 = x^2 - 6x + 9$$

Funktion f kuvaaja on siis ylöspäin aukeava paraabeli.

Funktio ei saa negatiivisia arvoja, mikäli sen kuvaaja on kaikilla muuttujan x arvoilla x-akselilla tai sen yläpuolella. Funktion f kuvaaja on kaikilla muuttujan x arvoilla x-akselilla tai sen yläpuolella mikäli funktiolla on korkeintaan yksi nollakohta.



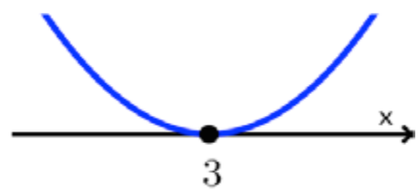


Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 6x + 9$ nollakohdat.

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \qquad a = 1,\ b = -6,\ c = 9$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Funktion f ainut nollakohta on 3. Täten funktion f kuvaaja on kaikilla muuttujan x arvoilla x-akselilla tai sen yläpuolella. Funktio f ei siis saa negatiivisia arvoja. □



220

Kaksoisepäyhtälö $-1 < x^2 - 5x + 5 < 1$ toteutuu niillä muuttujan x arvoilla, joilla totetuu sekä epäyhtälö $-1 < x^2 - 5x + 5$, että $x^2 - 5x + 5 < 1$. Ratkaistaan molemmat epäyhtälöt.

$$-1 < x^2 - 5x + 5$$

$$-x^2 + 5x - 5 - 1 < 0$$

$$-x^2 + 5x - 6 < 0$$

Ratkaistaan funktion $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ nollakohdat.

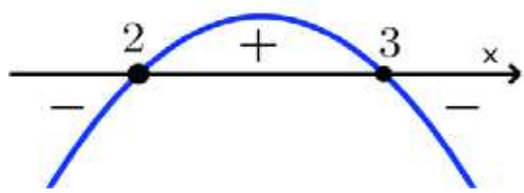
$$-x^2 + 5x - 6 = 0 \qquad a = -1,\ b = 5,\ c = -6$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-2} = \frac{-5 \pm 1}{-2}$$

$$x = \frac{-5+1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-5-1}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $-x^2 + 5x - 6 < 0$ toteutuu, kun $x < 2$ tai $x > 3$.

$$x^2 - 5x + 5 < 1 \qquad \big| -1$$

$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 5x + 4$ nollakohdat.

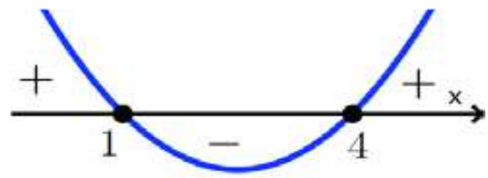
$$x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad a = 1,\ b = -5,\ c = 4$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

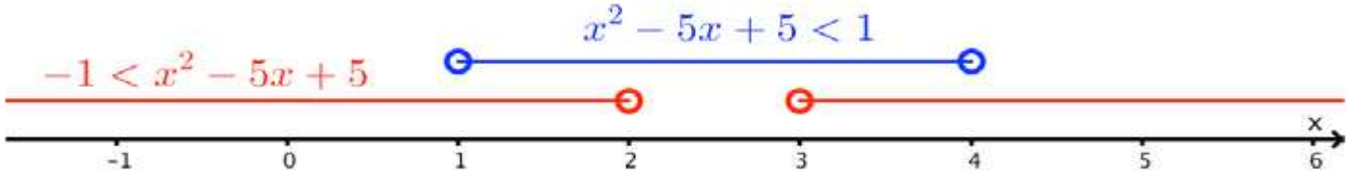
Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $x^2 - 5x + 4 < 0$ toteutuu, kun $1 < x < 4$.

Kaksoisepäyhtälö $-1 < x^2 - 5x + 5 < 1$ toteutuu, kun molemmat ehdoista $x < 2$ tai $x > 3$ ja $1 < x < 4$ ovat voimassa eli kun $1 < x < 2$ tai $3 < x < 4$.



Vastaus: $1 < x < 2$ tai $3 < x < 4$

221

a) Koska neliöjuuri on määritelty vain epänegatiivisille luvuille ja luvulla nolla ei voi jakaa, niin funktio $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6x^2 + 11x - 10}}$ on määritelty, kun $6x^2 + 11x - 10 > 0$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$6x^2 + 11x - 10 > 0$

$x < -\dfrac{5}{2}$ tai $x > \dfrac{2}{3}$

b) Funktio $f(x) = \sqrt{2x-1} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ on määritelty, kun sekä $\sqrt{2x-1}$, että $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ on määritelty.

Funktio $\sqrt{2x-1}$ on määritelty, kun $2x-1 \geq 0$.

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$2x-1 \geq 0$$

$$2x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

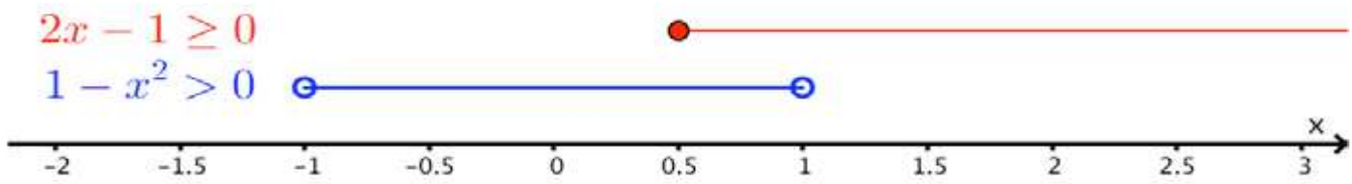
Funktio $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ on määritelty, kun $1-x^2 > 0$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$1-x^2 > 0$$

$$-1 < x < 1$$

Funktio f on määritelty, kun molemmat ehdoista $x \geq \frac{1}{2}$ ja $-1 < x < 1$ on voimassa eli kun $\frac{1}{2} \leq x < 1$.



Vastaus: a) $x < -\frac{5}{2}$ tai $x > \frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2} \leq x < 1$

222

Merkitään lukua kirjaimella x. Luvun neliö on tällöin x^2.

Luvun neliön x^2 tulee olla pienempi kuin luku x itse eli $x^2 < x$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$x^2 < x$$

$$0 < x < 1$$

Vastaus: Luvut x, jotka toteuttavat ehdon $0 < x < 1$.

223

Merkitään lukua kirjaimella x. Luvun neliö on tällöin x^2.

Luvun neliön x^2 ja luvun x erotuksen $x^2 - x$ tulee olla vähintään 20 eli $x^2 - x \geq 20$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$x^2 - x \geq 20$

$x \leq -4$ tai $x \geq 5$

Koska lukujen piti olla positiivisia, niin ratkaisuksi kelpaavat ne luvut x, jotka toteuttavat ehdon $x \geq 5$.

Vastaus: Luvut x, jotka toteuttavat ehdon $x \geq 5$.

224

Pallon korkeuden $24t - 4,9t^2$ tulee olla suurempi kuin 5 eli $24t - 4,9t^2 > 5$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$24t - 4,9t^2 > 5$$

$$0,218... < t < 4,679...$$

Pallo on siis yli 5 m:n korkeudella aikavälin $0,218... < t < 4,679...$. Lasketaan aikavälin pituus.

$$4,679... - 0,218... = 4,461... \approx 4,5 \text{ (s)}$$

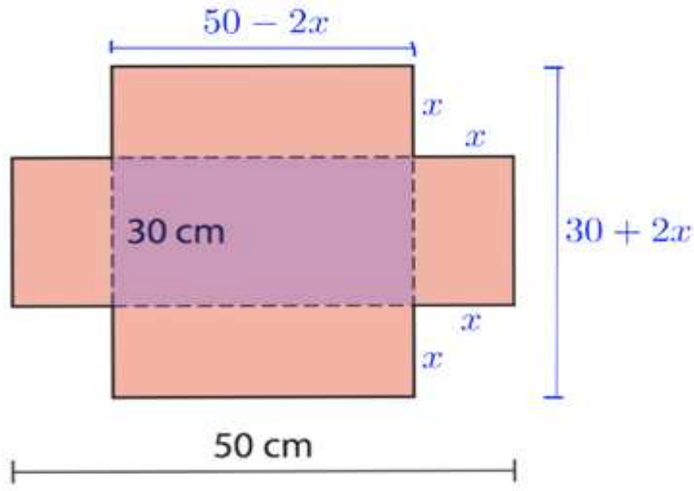
Pallon on yli 5 m:n korkeudella $4,5$ sekunnin ajan.

Vastaus: 4,5 s

225

Merkitään pois leikattavan neliön sivun pituutta kirjaimella x.

Tällöin laatikon pohjan leveys on $50-2x$ ja rullasta leikattavan pahvipalan pituus $30+2x$.



Laatikon mitat senttimetreinä ovat siis: leveys $50-2x$, pituus 30 ja korkeus x.

Laatikon tilavuus on tällöin $(50-2x)\cdot 30\cdot x = -60x^2+1500x$.
Toisaalta laatikon tilavuuden tulla olla vähintään
$6\ \text{L} = 6\ \text{dm}^3 = 6000\ \text{cm}^3$.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$-60x^2+1500x > 6000$$

$$5 < x < 20$$

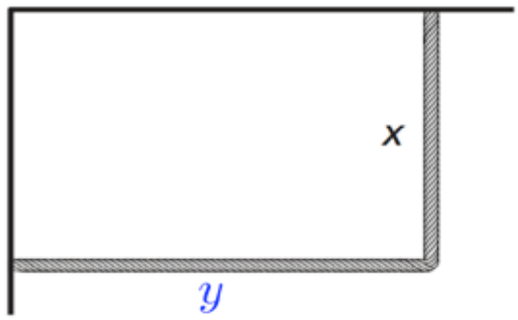
Pois leikattavan neliön sivun pituuden x pitää siis olla välillä
$5\ \text{cm} < x < 20\ \text{cm}$.

Tällöin rullasta leikattavan pahvipalan pituus on
vähintään $30+2x = 30+2\cdot 5\ \text{cm} = 40\ \text{cm}$ ja
enintään $30+2x = 30+2\cdot 20\ \text{cm} = 70\ \text{cm}$.

Vastaus: Pois leikattavan neliön sivun pituus on vähintään 5cm ja enintään 20 cm. Pahvia tarvitaan vähintään 40 cm ja enintään 70 cm.

226

a) Merkitään alueen pituutta kirjaimella y.



Köyttä on yhteensä 18 m. Ratkaistaan muuttuja y.

$$x + y = 18$$

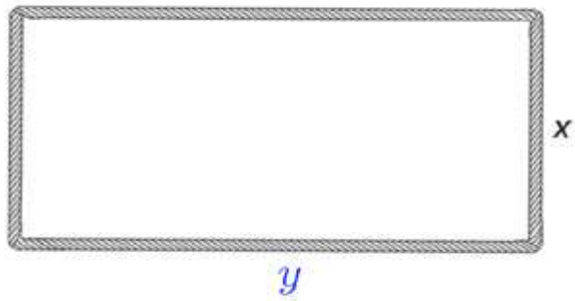
$$y = 18 - x$$

Alueen pituus on $18 - x$.

Muodostetaan alueen pinta-alan lauseke.

$$x \cdot y = x(18 - x) = 18x - x^2$$

b) Merkitään alueen pituutta kirjaimella y.



Köyttä on yhteensä 126 m. Ratkaistaan muuttuja y.

$$2x + 2y = 126$$

$$2y = 126 - 2x \qquad \big| : 2$$

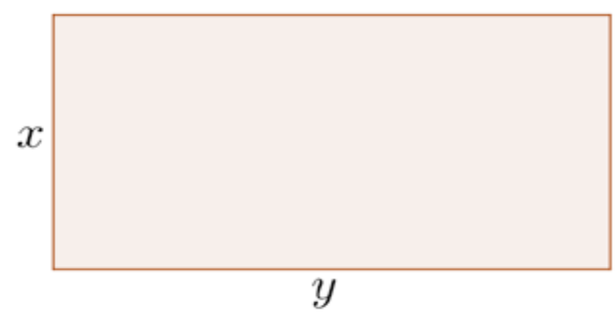
$$y = 63 - x$$

Alueen pituus on $63 - x$.

Muodostetaan alueen pinta-alan lauseke.

$$x \cdot y = x(63 - x) = 63x - x^2$$

Vastaus: a) pituus $18 - x$, pinta-ala $x(18 - x) = 18x - x^2$
b) pituus $63 - x$, pinta-ala $x(63 - x) = 63x - x^2$



227

a) Merkitään suorakulmion leveyttä kirjaimella x ja pituutta kirjaimella y.

Suorakulmion piiri on 164 m. Ratkaistaan muuttuja y.

$$2x + 2y = 164$$

$$2y = 164 - 2x \qquad \big| : 2$$

$$y = 82 - x$$

Muodostetaan suorakulmion pinta-alan lauseke.

$$x \cdot y = x(82 - x) = 82x - x^2$$

b) Pinta-ala on 1600 m^2. Ratkaistaan muuttuja x.

$$82x - x^2 = 1600$$

$$-x^2 + 82x - 1600 = 0$$

$$x = 32 \quad \text{tai} \quad x = 50$$

c) Jos kentän leveys x on 32 (m), niin pituus on
$y = 82 - x = 82 - 32 = 50$ (m).

Jos kentän leveys x on 50 (m), niin pituus on
$y = 82 - x = 82 - 50 = 32$ (m).

Molemmissa tapauksissa sivujen pituudet ovat 32 m ja 50 m.

Vastaus: a) $x(82 - x) = 82x - x^2$

b) yhtälö $82x - x^2 = 1600$, $x = 32$ tai $x = 50$

c) 32m ja 50 m

228

a) Leveyssuunnassa omenapuita on x kappaletta, joten pituussuunnassa niitä on $x + 7$ kappaletta.

Omenapuita on kaikkiaan $x(x+7) = x^2 + 7x$ kappaletta.

b) Omenapuita on yhteensä 144. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x.

$$x^2 + 7x = 144$$

$$x^2 - 7x - 144 = 0$$

$$x = -16 \quad \text{tai} \quad x = 9$$

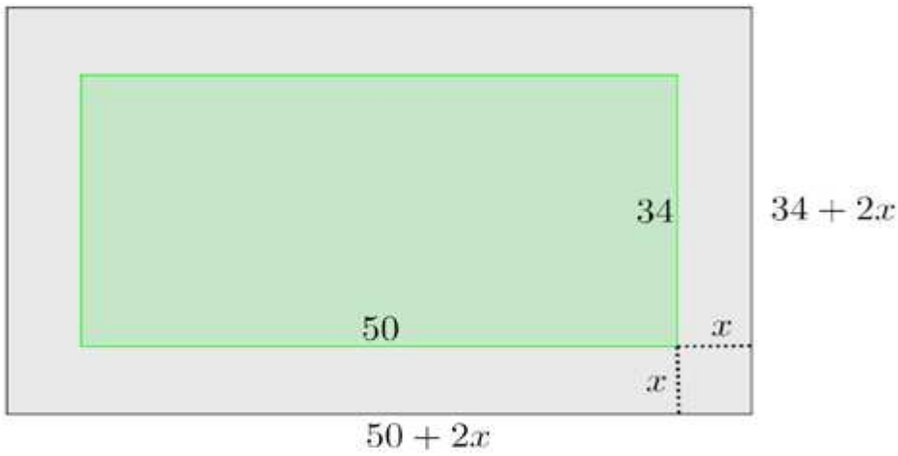
Negatiivinen juuri ei voi olla omenapuiden määrä leveyssuunnassa, joten $x = 9$.

Vastaus: a) $x(x+7) = x^2 + 7x$

b) yhtälö $x^2 + 7x = 144$, $x = 9$

229

Piirretään kuva. Merkitään jalkakäytävän leveyttä kirjaimella x.



Ulkoreuna on suorakulmio, jonka pituus on $50 + 2x$ (m) ja leveys $34 + 2x$ (m). Kokonaispinta-ala on 2145 m^2. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jalkakäytävän leveys x.

$$(50 + 2x)(34 + 2x) = 2145$$

$$4x^2 + 168x + 1700 = 2145$$

$$4x^2 + 168x - 445 = 0$$

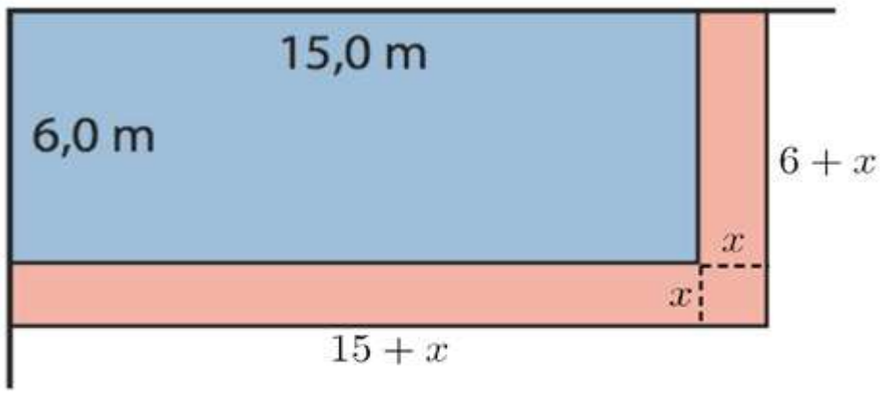
$$x = -44{,}5 \quad \text{tai} \quad x = 2{,}5$$

Negatiivinen juuri ei voi olla jalkakäytävän leveys. Jalkakäytävän leveys on siis 2,5 m.

Vastaus: 2,5 m

230

Piirretään kuva. Merkitään käytävän leveyttä kirjaimella x.



Ulkoreuna on suorakulmio, jonka pituus on $15 + x$ (m) ja leveys $6 + x$ (m). Käytävän pinta-ala saadaan, kun tämän suorakulmion pinta-alasta vähennetään uima-altaan pinta-ala.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan käytävän leveys x.

$$(15 + x)(6 + x) - 15 \cdot 6 = 41$$

$$x^2 + 21x = 41$$

$$x^2 + 21x - 41 = 0$$

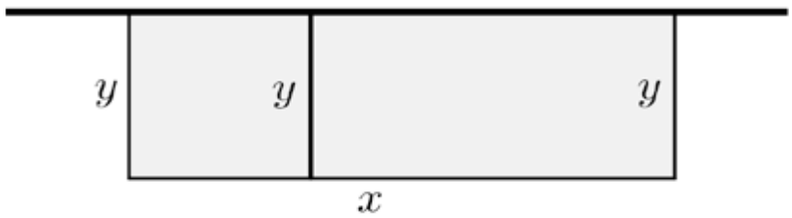
$$x = -22,798... \quad \text{tai} \quad x = 1,798...$$

Negatiivinen juuri ei voi olla käytävän leveys. Käytävän leveys on siis 1,8 m.

Vastaus: 1,8 m

231

Piirretään kuva. Merkitään aitauksen seinän suuntaisen sivun pituutta kirjaimella x ja seinää vastaan kohtisuoran sivun kirjaimella y.



Aitaa on käytettävissä 15 m. Ratkaistaan muuttuja y.

$$3y + x = 15$$

$$3y = 15 - x \qquad \big| : 3$$

$$y = 5 - \frac{1}{3}x$$

Aitauksen pinta-ala on vähintään 12 m^2. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan muuttuja x.

$$xy \geq 12$$

$$x(5 - \frac{1}{3}x) \geq 12$$

$$5x - \frac{1}{3}x^2 \geq 12$$

$$-\frac{1}{3}x^2 + 5x - 12 \geq 0$$

$$3 \leq x \leq 12$$

Vastaus: Seinän suuntaisen sivun pituuden tulee olla vähintään 3 m ja enintään 12 m.